Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č.: XXI

Název: Měření tíhového zrychlení

Pracoval: Pavel Brožek stud. skup. 12 dne 17.3.2008

Odevzdal dne: ....

Hodnocení:..

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: .... dne ....

1 Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
2. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

2 Teorie

2.1 Metoda reverzního kyvadla

Pokud fyzické kyvadlo kývá se stejnou periodou kolem dvou různých rovnoběžných os v rovině, která prochází těžištěm tělesa, a nejsou tyto osy symetricky položené vzhledem k těžišti, platí pro periodu kyvů fyzického kyvadla kolem těchto os vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \ , \tag{1}$$

kde l_r je vzdálenost dvou os a g je místní tíhové zrychlení. Pokud tyto dvě osy najdeme, změříme jejich vzdálenost a periodu kyvů kyvadla kolem těchto os, můžeme určit místní tíhové zrychlení z (1) jako

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2} \ . \tag{2}$$

Poloha os je v tomto experimentu dána, můžeme však měnit polohu těžké čočky na jedné straně tělesa a tím tak měnit periodu kyvů kolem os. Změříme periodu kyvů v krajních polohách čočky pro obě osy a početní interpolací pak získáme polohu čočky, při které bude perioda kyvů kolem obou os stejná.

2.2 Metoda matematického kyvadla

Pro periodu T fyzického kyvadla platí s dostatečnou přesností vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \ , \tag{3}$$

kde I je moment setrovačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m je hmotnost kyvadla, g je místní tíhové zrychlení, d je vzdálenost těžiště od osy otáčení a úhel α je maximální výchylka těžiště z rovnovážné polohy. Pro místní tíhové zrychlení g dostáváme vztah

$$g = \frac{4\pi^2 I\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{mdT^2} \ . \tag{4}$$

Pro periodu kmitů T matematického kyvadla o délce l a malé výchylky α můžeme použít méně přesný vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ , \tag{5}$$

a z něj vztah pro místní tíhové zrychlení, které v případě matematického kyvadla označíme g_m. Dostaneme vztah

$$g_m = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \ . \tag{6}$$

2.3 Chyby idealizace

Při počítání přenosu chyb a určování celkové chyby měření budu používat vzorce z [1]

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\mu^2 \sigma_{x_i}^2 \tag{7}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{stat}}^2 + \sigma_{\text{sys}}^2} \tag{8}$$

Relativní chybu η_α způsobenou zanedbáním malé výchylky α určím podle vzorce

$$\eta_\alpha = \frac{g - g_\alpha}{g_\alpha} \ , \tag{9}$$

kam za g dosadím nejpřesněji spočítané tíhové zrychlení ze vzorce (4) a g_α spočítané ze stejného vzorce, ale při zanedbání výchylky, tedy při $\alpha = 0$. Po úpravách dostaneme

$$\eta_\alpha = \frac{8\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^4\frac{\alpha}{2}}{16} \ . \tag{10}$$

Relativní chybu η_I způsobenou idealizací fyzického kyvadla určím podle vzorce

$$\eta_I = \frac{g - g_I}{g_I} \ , \tag{11}$$

kam za g dosadím nejpřesněji spočítané tíhové zrychlení ze vzorce (4) a g_I spočítané ze stejného vzorce, ale při idealizaci matematickým kyvadlem, tedy při $I = ml^2$. Po úpravách dostaneme

$$\eta_I = \frac{I}{ml^2} - 1 \ . \tag{12}$$

2.4 Pomůcky

Tyč se dvěma rovnoběžnými břity a těžkou čočkou, těžká kulička, nit, digitální čítač se stopkami, pásové měřidlo, posuvné měřidlo, analytické váhy.

3 Výsledky měření

3.1 Podmínky měření

Teplota: $22,3°$C
Relativní vlhkost vzduchu: $34,5\%$
Tlak vzduchu: $976,4$ hPa
Místo: Praha

3.2 Metoda reverzního kyvadla

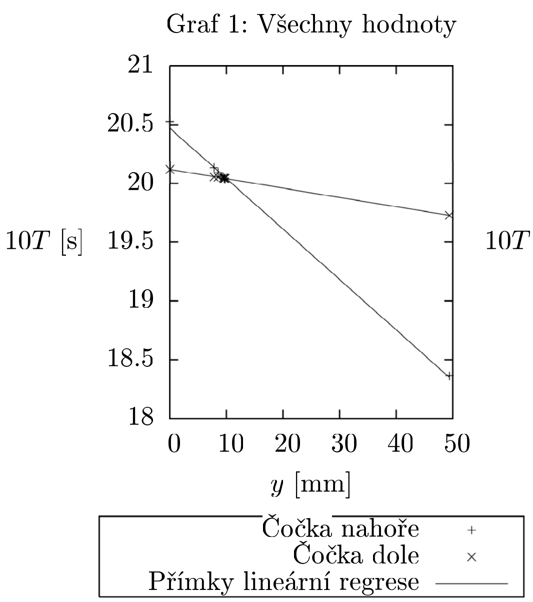
Pro krajní polohy čočky (vzdálenost čočky od konce tyče označím y) jsem změřil periodu kmitů reverzního kyvadla při poloze čočky nahoře (T_n) a dole (T_d). Početní interpolací jsem pak určil průsečík přímky spojující body grafu závislosti periody na poloze čočky s čočkou nahoře a přímky spojující body grafu závislosti periody na poloze čočky s čočkou dole. V okolí průsečíku jsem postupoval stejně a dospěl jsem tak k poloze čočky, kdy perioda kmitů byla s dostatečnou přesností stejná s čočkou nahoře i dole.

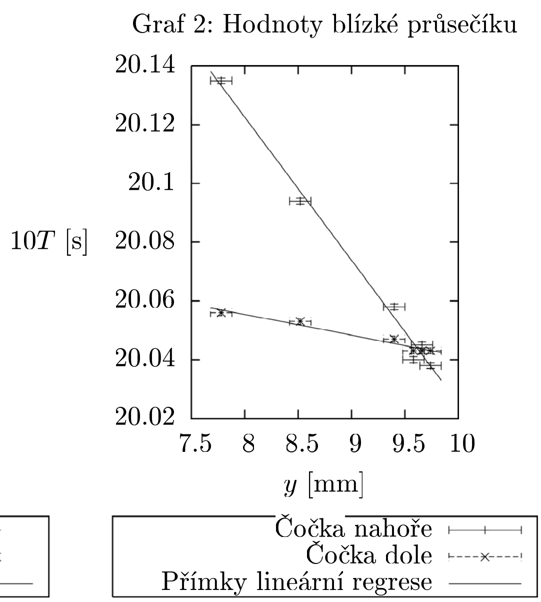
Chyba přístroje měřícího čas je $0,001$s, protože však měření mohlo být ovlivněno prouděním vzduchu nebo tlumením kyvů, odhaduji přesnost měření času na $0,005$ s. Pro větší přesnost jsem měřil deset period. Přesnost určení polohy čočky není podstatná, cílem bylo pouze dosáhnout toho, že periody s čočkou nahoře a dole budou stejné a měření polohy tak sloužilo pouze pro účely

Tabulka 1: Perioda kyvů s čočkou nahoře a dole v závislosti na poloze čočky

y [mm]	$10T_n$ [s]	$10T_d$ [s]
0,00	20,529	20,120
0,00	20,522	20,118
49,42	18,361	19,728
49,42	18,361	19,726
7,78	20,137	20,057
7,78	20,133	20,055
8,52	20,094	20,053
8,52	20,094	20,053
9,40	20,058	20,047
9,40	20,058	20,047
9,74	20,038	20,043
9,74	20,038	20,043
9,58	20,040	20,043
9,58	20,040	20,043
9,66	20,046	20,043
9,66	20,044	20,043

Grafy závislosti desetinásobku periody na poloze čočky





interpolace. Hodnoty naměřených period v závislosti na poloze čočky uvádím v tabulce 1, závislosti jsou znázorněny na grafu 1 a 2. Periodu kyvů T určím tak, že vezmu aritmetický průměr čtyř hodnot naměřených při konečné poloze čočky. Chybu určím podle vzorce (8).

$$T = (2,0044 \pm 0,0005)\mathrm{s} \tag{13}$$

Vzdálenost dvou břitů jsem měřil pásovým měřidlem, systematickou chybu odhaduji na $0,2$cm. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2: Vzdálenost břitů reverzního kyvadla

č. měření	l_r [cm]
1	99,4
2	99,4
3	99,4
4	99,4
průměr	99,4
σ_{stat}	0
σ_{sys}	0,2
σ	0,2

$$l_r = (99,4 \pm 0,2)\mathrm{cm} \tag{14}$$

Tíhové zrychlení určené pomocí reverzního kyvadla určím ze vzorce (2), chybu počítám podle (7)

$$g = (9,77 \pm 0,02)\mathrm{ms}^{-2} \tag{15}$$

3.3 Metoda matematického kyvadla

Matematické kyvadlo jsem realizoval kuličkou o průměru d_k s háčkem zavěšenou na niti. d_k jsem měřil posuvným měřidlem. Hmotnost nitě m_n' jsem vážil na analytických vahách, hmotnost závaží $m_z = m_k + m_h$ (m_k je hmotnost kuličky a m_h hmotnost háčku), jsem vážil na laboratorních vahách. Nit měla délku $l_1 + l_2$, kde l_1 byla délka části použité jako závěs a l_2 byla délka nepoužité, ale vážené části. l_1 a l_2 jsem určil pásovým měřidlem. Háček na kuličce jsem pro účely měření objemu považoval za kvádr o rozměrech a, b a c, z kterého byl pravděpodobně stočen. Výšku háčku označím h. Všechny rozměry háčku jsem měřil posuvným měřidlem. Pro určení výchylky α jsem změřil pásovým měřidlem vzdálenost maximálních výchylek středu kuličky x. Pro určení periody kmitů kyvadla T jsem měřil deset period digitálním čítačem se stopkami. Všechny naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3. Systematické chyby dané odhadem podle chyb měřidel jsou uvedeny také v tabulce 3. Určil jsem následující veličiny:

$$\begin{aligned}
m_n' &= (0,5927 \pm 0,0002)\mathrm{g} \\
m_z &= (287,7 \pm 0,1)\mathrm{g} \\
d_k &= (40,1 \pm 0,2)\mathrm{mm} \\
l_1 &= (98,8 \pm 0,2)\mathrm{cm} \\
l_2 &= (71,5 \pm 0,5)\mathrm{cm} \\
x &= (5,5 \pm 0,5)\mathrm{cm} \\
a &= (2,4 \pm 0,1)\mathrm{mm} \\
b &= (27 \pm 1)\mathrm{mm} \\
c &= (4,9 \pm 0,1)\mathrm{mm} \\
h &= (13,02 \pm 0,05)\mathrm{mm} \\
T &= (2,0246 \pm 0,0005)\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Tabulka 3: Naměřené hodnoty veličin pro výpočet matematického kyvadla

č. měření	m'_n [g]	m_z [g]	d_k [mm]	l_1 [cm]	l_2 [cm]	x [cm]
1	0,5927	287,7	40,40	98,8	71,5	5,5
2			39,82	98,8		
3			39,96	98,7		
4			39,88	98,8		
5			40,40	98,9		
6			40,18			
7			39,96			
8			40,24			
9			39,92			
10			39,84			
průměr			40,1	98,8		
σ_{stat}			0,2	0,06		
σ_{sys}	0,0002	0,1	0,05	0,2	0,5	0,5
σ	0,0002	0,1	0,2	0,2	0,5	0,5
č. měření	a [mm]	b [mm]	c [mm]	h [mm]	$10T$ [s]	T [s]
1	2,34	27,0	4,80	13,02	20,2467	2,02467
2	2,36		5,02		20,2462	2,02462
3	2,58		5,00			
průměr	2,4	27	4,9	13,02		2,0246
σ_{stat}	0,1	0	0,1	0		0,00002
σ_{sys}	0,05	1	0,05	0,05	0,005	0,0005
σ	0,1	1	0,1	0,05		0,0005

Hmotnost kuličky m_k a háčku m_h určím podle vzorce

$$m = \varrho V \ , \tag{16}$$

kde ϱ je hustota materiálu, z kterého jsou kulička s háčkem vyrobeny a V je objem. Objemy kuličky a háčku mohu určit ze známých vzorců. Protože znám hmotnost kuličky s háčkem m_z a jejich celkový objem, mohu spočítat ϱ. Hmotnosti kuličky a háčku jsem vypočítal:

$$\begin{aligned} m_k &= (285,0 \pm 0,2)\text{g} \\ m_h &= (2,7 \pm 0,2)\text{g} \end{aligned}$$

Protože znám hmotnost nitě m'_n a její délku $l_1 + l_2$, mohu určit její délkovou hustotu a z té pak hmotnost nitě použité jako závěs (označím m_n).

$$m_n = (0,344 \pm 0,001)\text{g} \tag{17}$$

Celkovou hmotnost m jako součet hmotností závaží a nitě jsem spočítal

$$m = (288,0 \pm 0,1)\text{g} \tag{18}$$

Vzdálenost těžiště od osy otáčení l jsem určil podle vzorce pro výpočet hmotného středu soustavy hmotných bodů

$$l = \frac{m_k \left(\frac{d_k}{2} + h + l_1\right) + m_h \left(\frac{h}{2} + l_1\right) + m_n \frac{l_1}{2}}{m} \tag{19}$$

Z toho dostanu

$$l = (1020 \pm 2)\text{mm} \tag{20}$$

Nyní mohu podle vzorce (6) spočítat tíhové zrychlení g_m z doby kmitu matematického kyvadla

$$g_m = (9,82 \pm 0,02)\mathrm{ms}^{-2} \tag{21}$$

Abych mohl určit chybu způsobenou zanedbáním výchylky, spočítám úhel α. Ten určím z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou odpovídající vzdálenosti středu kuličky od osy otáčení a protilehlou odvěsnou odpovídající polovině vzdálenosti x.

$$\alpha = (0,027 \pm 0,002)\mathrm{rad} \tag{22}$$

Abych mohl určit chybu způsobenou idealizací fyzického kyvadla, spočítám moment setrvačnosti soustavy I. Přitom pro moment setrvačnosti háčku použiju vzorec pro válec, protože tvar háčku nejvíce odpovídá válci s osou rovnoběžnou s osou rotace, uvažuji, že osa je v polovině výšky háčku h. Pro momenty setrvačností těles použiju Steinerovu větu. Pak platí vzorec

$$I = \frac{2}{5}m_k\left(\frac{d_k}{2}\right)^2 + m_k\left(\frac{d_k}{2}+h+l_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_h\left(\frac{h}{2}\right)^2 + m_h\left(\frac{h}{2}+l_1\right)^2 + \frac{1}{12}m_n l_1^2 + m_n\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 \; . \tag{23}$$

Dosazením dostávám

$$I = (0,300 \pm 0,001)\mathrm{kgm}^2 \; . \tag{24}$$

Dosazením do (10) a (12) získám

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &= (9 \pm 3)\cdot 10^{-5} \\ \eta_I &= (1 \pm 5)\cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

4 Diskuse výsledků

Z hodnot v grafu 1 a 2 je zřejmé, že interpolace lineární závislostí vedla dostatečně rychle ke správné poloze čočky.

Hodnota tíhového zrychlení určeného metodou reverzního kyvadla neodpovídá ani v rámci chyby tabelované hodnotě $g = 9,810$ ms^{-2} v [2]. To je pravděpodobně způsobeno tím, že vzorec (1) platí pro netlumené kmity. Při měření však byly kyvy tlumeny v místě dotyku břitů s lůžkem a odporem vzduchu. Tlumení kmitů zvětšuje jejich periodu a podle (2) by mělo zmenšit naměřenou hodnotu g, což odpovídá naměřeným hodnotám.

Tíhové zrychlení určené metodou matematického kyvadla se v rámci chyby shoduje s tabelovanou hodnotou $g = 9,810$ ms^{-2}. Obě metody poskytly výsledek se stejnou chybou, ale vzhledem k tomu, že se g určené metodou reverzního kyvadla lišilo od tabelované hodnoty, je pro určení místního tíhového zrychlení lepší použít metodu matematického kyvadla.

Studoval jsem, jaký vliv na výsledek měření pomocí matematického kyvadla mělo zanedbání malé výchylky α a idealizace $I = ml^2$. Protože výchylka kuličky byla pouze přibližně $\alpha = 1,5°$, byla aproximace zanedbání výchylky oprávněná, což ukazuje výpočet relativní chyby η_α, která je o řád menší než relativní chyba výsledku. V případě idealizace $I = ml^2$ se mi nepodařilo změřit všechny potřebné veličiny dostatečně přesně, abych mohl určit, zda tato idealizace je dostatečně přesná. Relativní chyba η_I se může pohybovat až v řádu chyby výsledku (21). V tomto případě by nebylo možné idealizaci provést. Není však vyloučeno, že chyba této idealizace může být řádově menší než chyba výsledku.

Pro přesnější měření g pomocí reverzního kyvadla bychom mohli změřit konstantu útlumu δ mechanických kmitů a přepočítat s její pomocí periodu kmitů na kmity netlumené, při kterých už platí vzorec (1). Pro přesnější měření g pomocí matematického kyvadla by bylo nutné změřit přesněji zejména rozměry kuličky, háčku a délky závěsu.

5 Závěr

Metodou reverzního kyvadla jsem určil místní tíhové zrychlení

$$g = (9,77 \pm 0,02)\mathrm{ms}^{-2} \; . \tag{25}$$

Metodou matematického kyvadla jsem určil místní tíhové zrychlení

$$g_m = (9,82 \pm 0,02)\mathrm{ms}^{-2} \tag{26}$$

Vypočítal jsem chyby, kterých se dopouštím idealizací reálného kyvadla v rámci modelu matematického kyvadla a zjistil tak, že idealizace zanedbání výchylky nevnáší do měření významnou chybu. Pokud zanedbáme rozložení hmoty fyzického kyvadla, není vyloučeno, že je do měření zanesena znatelná chyba.

Reference

[1] Englich J.: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006

[2] Mikulčák J.: Tabulky a vzorce, Prometheus, Praha 2006