

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č.: XVII

Název: Studium otáčení tuhého tělesa

Pracoval: Pavel Brožek

stud. skup. 12

dne 10.3.2008

Odevzdal dne:

Hodnocení:

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne

1 Pracovní úkol

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

2 Teorie

2.1 Měření periody torzních kmitů

Pro periodu torzních kmitů platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (1)$$

kde I je moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm a D je direkční moment vlákna. Pokud máme válec o hmotnosti M a průměru d_v , můžeme spočítat jeho moment setrvačnosti I_v

$$I_v = \frac{1}{8}Md_v^2. \quad (2)$$

Tento válec zavěsíme v jeho ose na vlákno a změříme periodu torzních kmitů T_v . Z (1) určíme direkční moment vlákna. Pro moment setrvačnosti I tak platí vztah

$$I = \frac{Md_v^2T^2}{8T_v^2}. \quad (3)$$

2.2 Moment setrvačnosti vzhledem k různým osám procházejícím těžištěm

Pokud označíme jednotkový vektor směru osy procházející těžištěm (v_x, v_y, v_z) , kde osy x , y a z mají směry hran kvádrů a , b a c a kvádr má hlavní momenty setrvačnosti I_x , I_y a I_z , pak moment setrvačnosti vzhledem k ose dané jednotkovým vektorem určíme ze vztahu

$$I = v_x^2I_x + v_y^2I_y + v_z^2I_z. \quad (4)$$

Pro jednotkový vektor tělesové úhlopříčky kvádrů platí vztahy

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad v_z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad (5)$$

pro jednotkový vektor stěnové úhlopříčky stěny kvádrů s hranami a a b platí vztahy

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad v_z = 0. \quad (6)$$

2.3 Steinerova věta

Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející těžištěm a rovnoběžné s břity určíme měřením periody torzních kmitů (I_0) a pomocí Steinerovy věty (I'_0). Platí vztah

$$I'_0 = I_b - md^2, \quad (7)$$

kde I_b je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející břity, která je osy procházející těžištěm vzdálená d , a m je hmotnost tyče. Moment setrvačnosti I_b určíme pomocí fyzického kyvadla - tyč necháme kývat na břitech a určíme tak periodu kmitů T_f , pro kterou platí vztah

$$T_f = 2\pi \sqrt{\frac{I_b}{mgd}} . \quad (8)$$

Z (7) a (8) tak dostáváme vztah pro I'_0 :

$$I'_0 = \frac{T_f^2 mgd}{4\pi^2} - md^2 \quad (9)$$

2.4 Pomůcky

Drát se šroubem, upínací zařízení, válec se závitem, kvádr se závity, tyč se závitem a břity, lůžko pro kyvadlo, stopky, stojan se svislou tyčí, tabule, pásové měřidlo, posuvné měřidlo, mikrometr, laboratorní váhy, šroubovák.

3 Výsledky měření

3.1 Podmínky měření

Teplota: 23,9°C

Relativní vlhkost vzduchu: 31,3%

Tlak vzduchu: 969,7 hPa

Místo: Praha

3.2 Měření momentu setrvačnosti

Rozměry kvádra označím $a > b > c$. a a b jsem určoval pomocí posuvného měřidla a c mikrometrem. Průměr válce d_v jsem měřil posuvným měřidlem. Vzdálenost břitů d od těžiště tyče jsem měřil pásovým měřidlem. Hmotnost tyče m a válce M jsem měřil jedním vážením na laboratorních vahách s přesností 0,1g. Systematické chyby jsem určil z přesnosti daných měřidel. Celkové chyby jsem počítal podle [1] jako

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{stat}}^2 + \sigma_{\text{sys}}^2} \quad (10)$$

Naměřené hodnoty, jejich průměry, statistické chyby σ_{stat} , systematické chyby σ_{sys} a celkové chyby σ uvádím v tabulce 1. Určil jsem tedy následující veličiny:

$$a = (127,86 \pm 0,04) \text{ mm}$$

$$b = (64,05 \pm 0,05) \text{ mm}$$

$$c = (18,99 \pm 0,01) \text{ mm}$$

$$d_v = (108,00 \pm 0,03) \text{ mm}$$

$$d = (15,7 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$m = (281,7 \pm 0,1) \text{ g}$$

$$M = (903,8 \pm 0,1) \text{ g}$$

Periody torzních kmitů a periodu kmitů fyzického kyvadla jsem měřil pomocí digitálních stoppek. Aby měření period bylo přesnější, spouštěl jsem a zastavoval jsem stopky ve chvíli, kdy rotující těleso mělo velkou rychlost a fáze pohybu tak byla v určité poloze jednoznačnější než při maximální výchylce. To jsem realizoval pomocí stojanu s tyčí a čáry na tabuli - při pohledu přes tyč na čáru na tabuli těleso v danou fázi protlo rovinu tyče a čáry.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty rozměrů kvádrů, válce a tyče a hmotností

č. měření	a [mm]	b [mm]	c [mm]	d_v [mm]	d [cm]	m [g]	M [g]
1	127,86	64,02	18,98	108,01	15,8	281,7	903,8
2	127,87	64,10	18,99	108,00	15,7		
3	127,81	64,03	18,98	108,01	15,7		
4	127,86	64,05	19,01	108,00	15,7		
5	127,84	64,13	19,00	108,00	15,7		
6	127,84	64,03	18,99	107,99	15,7		
7	127,88	64,05	18,98	108,00	15,7		
8	127,83	64,07	18,99	108,00			
9	127,92	64,05	18,99	107,99			
10	127,85	63,99	18,98	108,00			
průměr	127,86	64,05	18,99	108,00	15,7	281,7	903,8
σ_{stat}	0,03	0,04	0,01	0,006	0,03	0	0
σ_{sys}	0,03	0,03	0,01	0,03	0,1	0,1	0,1
σ	0,04	0,05	0,01	0,03	0,1	0,1	0,1

V případě torzních kmitů jsem měřil pět period, u kmitů fyzického kyvadla deset period. Měření většího počtu period torzních kmitů by bylo příliš časově náročné a v případě měření většího počtu period fyzického kyvadla by se už začalo výrazněji projevovat tření a útlum kyvadla.

Měřil jsem periody T_x , T_y a T_z torzních kmitů vzhledem k příslušným osám x , y a z , rovnoběžným s hranami a , b a c . Dále jsem měřil periodu torzních kmitů T_u kvádrů vzhledem k dané obecné ose, periodu T_v torzních kmitů válce vzhledem k jeho ose symetrie, periodu T_t torzních kmitů tyče vzhledem k ose procházející jejím těžištěm a rovnoběžné s břity. Měřil jsem periodu kmitů T_f tyče jako fyzického kyvadla. Systematickou chybu měření času jsem určil jako 0,2s, protože předpokládám reakční rozpětí člověka 0,1s a to se projeví při spuštění a zastavení stopek. Naměřené násobky period, spočtené periody, průměry a chyby jsou uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty násobků period a vypočtené periody

č.měření	Kvadr				Válec	Tyč	
	$5T_x$ [s]	$5T_y$ [s]	$5T_z$ [s]	$5T_u$ [s]	$5T_v$ [s]	$5T_t$ [s]	$10T_f$ [s]
1	32,1	58,5	65,3	39,1	61,0	88,9	9,5
2	32,1	58,4	65,2	39,0	60,8	88,8	9,4
3	32,2	58,6	65,4	39,0	61,0	88,9	9,5
4	32,1	58,7	65,4	39,1	61,0	88,8	9,4
5	32,1	58,6	65,4	39,1	61,0	88,9	9,5
průměr	32,12	58,56	65,34	39,06	60,96	88,86	9,46
σ_{stat}	0,04	0,10	0,08	0,05	0,08	0,05	0,05
σ_{sys}	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
σ	0,20	0,22	0,22	0,21	0,22	0,21	0,21
	T_x [s]	T_y [s]	T_z [s]	T_u [s]	T_v [s]	T_t [s]	T_f [s]
průměr	6,42	11,71	13,07	7,81	12,19	17,77	0,95
σ	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,02

Určil jsem tak následující veličiny:

$$T_x = (6,42 \pm 0,04) \text{ s}$$

$$T_y = (11,71 \pm 0,04) \text{ s}$$

$$T_z = (13,07 \pm 0,04) \text{ s}$$

$$T_u = (7,81 \pm 0,04) \text{ s}$$

$$T_v = (12,19 \pm 0,04) \text{ s}$$

$$T_t = (17,77 \pm 0,04) \text{ s}$$

$$T_f = (0,95 \pm 0,02) \text{ s}$$

Nyní mohu z (3) určit momenty setrvačnosti I_x , I_y , I_z , moment setrvačnosti vzhledem k dané obecné ose I_u a moment setrvačnosti I_0 tyče vzhledem k ose procházející těžištěm a rovnoběžné s břity. Přenos chyb jsem ve všech výpočtech počítal podle [1] ze vzorce

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (11)$$

Určil jsem tedy následující veličiny:

$$I_x = (3,66 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = (1,22 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = (1,51 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_u = (5,41 \pm 0,07) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = (2,80 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ze vzorců (5) jsem určil souřadnice v_x , v_y a v_z jednotkového vektoru ve směru úhlopříčky kvádrů:

$$v_x = (886,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$$

$$v_y = (444,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$$

$$v_z = (131,64 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$$

Vzhledem k tomu, že obecná osa kvádrů se kterým jsem pracoval měla spíše směr úhlopříčky stěny s hranami a a b , určil jsem ještě podle (6) jednotkový vektor v tomto směru se souřadnicemi v'_x , v'_y a v'_z :

$$v'_x = (893,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$$

$$v'_y = (448,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$$

$$v'_z = 0$$

Podle (4) jsem určil teoretickou hodnotu momentu setrvačnosti pro osu v tělesové úhlopříčce I_{u1} a pro osu se směrem stěnové úhlopříčky I_{u2} :

$$I_{u1} = (5,54 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{u2} = (5,38 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Podle vztahu (9) jsem určil moment setrvačnosti tyče I'_0 užitím Steinerovy věty (za tíhové zrychlení g jsem dosadil hodnotu pro Prahu $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$):

$$I'_0 = (3,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (12)$$

4 Diskuse výsledků

Na chybě určení momentů setrvačnosti se nejvíce projevila chyba měření period. U torzních kmitů bychom tuto chybu mohli omezit měřením většího počtu period, v případě fyzického kyvadla to možné není, protože už po malém počtu period dochází ke zdatnému tlumení kmitů. Zlepšit přesnost měření by se také dala vyloučením reakčního rozptylu člověka např. použitím PC, ke kterému by byl připojen detektor (fototranzistor), který by snímal paprsek z LED-diody. Vše

by bylo uspořádáno tak, aby při průchodu kmitajícího tělesa rovnovážnou polohou byl přerušen paprsek světla.

Směr zadané obecné osy kvádrů se spíše jevil jako směr stěnové úhlopříčky stěny s hranami a a b než jako směr tělesové úhlopříčky. Obě dvě varianty jsem ověřoval výpočtem momentu setrvačnosti vzhledem k těmto osám z momentu setrvačnosti hlavních os kvádrů. Výsledek měření momentu setrvačnosti vzhledem k dané obecné ose se v rámci chyb shoduje s osou ve směru stěnové úhlopříčky. Je však možné, že daná obecná osa má jiný směr, než je směr stěnové úhlopříčky. Tento směr se od směru stěnové úhlopříčky příliš neodlišuje, a tak se moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k dané ose od momentu setrvačnosti kvádrů vzhledem k ose ve směru stěnové úhlopříčky odlišuje pouze v rámci chyby měření.

Moment setrvačnosti tyče určený pomocí měření periody kmitů tyče jako fyzického kyvadla a moment setrvačnosti tyče určený pomocí měření periody torzních kmitů tyče se liší pouze v rámci chyby. Ověřil jsem tak platnost Steinerovy věty. Chyba určení momentu setrvačnosti pomocí fyzického kyvadla je řádově větší než chyba určení pomocí torzních kmitů. To je způsobeno nutností měřit malý časový interval při měření periody kmitů fyzického kyvadla a při stejné systematické chybě tak vzniká větší chyba relativní. Moment setrvačnosti je tedy vhodnější měřit metodou torzních kmitů.

Pro kvádr použitý při měření nemám k dispozici žádné jiné nezávislé výsledky měření, nemohu tedy ověřit správnost dosažených výsledků.

5 Závěr

Měřením jsem určil momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám setrvačnosti

$$\begin{aligned}I_x &= (3,66 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\I_y &= (1,22 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\I_z &= (1,51 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.\end{aligned}$$

Uřčil jsem složky vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů

$$\begin{aligned}v'_x &= (893,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}, \\v'_y &= (448,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}, \\v'_z &= 0.\end{aligned}$$

Vypočítal jsem moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose rotace

$$I_{u2} = (5,38 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (13)$$

a ověřil měřením

$$I_u = (5,41 \pm 0,07) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (14)$$

Měřením periody torzních kmitů a kmitů fyzického kyvadla jsem dvěma způsoby určil moment setrvačnosti tyče

$$\begin{aligned}I_0 &= (2,80 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\I'_0 &= (3,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

a ověřil tak platnost Steinerovy věty.

Reference

- [1] English J.: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006