

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č.: XIII

Název: Měření momentu setrvačnosti kola

Pracoval: Pavel Brožek

stud. skup. 12

dne 14.3.2008

Odevzdal dne: .....

Hodnocení: .....

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
<b>Celkem</b>	max. 20	

Posuzoval: ..... dne .....

# 1 Pracovní úkol

1. Změřte moment setrvačnosti kola metodou kyvů.
2. Změřte moment setrvačnosti kola metodou otáčení pro různé hodnoty parametru  $\alpha$ . Graficky znázorněte závislost  $\omega = \omega(t)$  pro tři odlišné hodnoty parametru  $\alpha$
3. Určete moment třecích sil  $M_t$  a moment setrvačnosti kola  $I_k$  korigovaný na nulovou hodnotu tření.
4. Graficky znázorněte závislost nekorigovaného momentu  $I^*$  na parametru  $\alpha$ .

## 2 Teorie

### 2.1 Měření momentu setrvačnosti kola metodou kyvů

Moment setrvačnosti kola můžeme měřit tak, že na obvod kola připevníme malé závaží o hmotnosti  $m_z$ . Těžiště závaží bude ve vzdálenosti  $l$  od osy kola. Osu kola umístíme vodorovně, kolo mírně vychýlíme z rovnovážné polohy a změříme dobu kmitů  $T$ . Pokud uvažujeme, že rozměry závaží jsou dostatečně malé vzhledem k  $l$  a úhel vychylky není příliš velký, pak pro moment setrvačnosti kola  $I$  platí vztah

$$I = m_z l \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right), \quad (1)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení.

### 2.2 Měření momentu setrvačnosti kola metodou otáčení

Pokud na souosý válec na kole o průměru  $d$  navineme nit se závažím  $m$  a závaží uvolníme, začne závaží roztáčet kolo se stálým úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Jestliže zanedbáme tření, pak pro moment setrvačnosti kola  $I^*$  platí vztah

$$I^* = \frac{1}{4} m d^2 \left( \frac{2g}{d\varepsilon} - 1 \right). \quad (2)$$

Označíme

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Pokud budeme uvažovat, že třecí síly působí konstantním momentem  $M_T$ , pak pro korigovaný moment setrvačnosti kola  $I_k$  dostaneme vztah

$$I_k = \frac{1}{4} m d^2 \left( \frac{2g}{d\varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{\varepsilon} M_T \quad (4)$$

$$I_k = I^* - \alpha M_T. \quad (5)$$

Jestliže vyjádříme  $I^*$  z rovnice (5), dostaneme lineární závislost

$$I^* = I_k + \alpha M_T. \quad (6)$$

Protože  $I^*$  a  $\alpha$  můžeme změřit pro různé zrychlení  $\varepsilon$ , tj. použitím různých závaží  $m$  a různých poloměrů  $d$ , můžeme lineární regresní analýzou určit koeficienty  $I_k$  a  $M_T$  v rovnici (6). Získáme tak korigovaný moment setrvačnosti kola  $I_k$  a velikost momentu třecích sil  $M_T$ .

Pro přenos chyb budu ve všech výpočtech používat podle [1] vzorec:

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_\mu^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (7)$$

Celkovou chybu měření budu ze systematické a statistické určovat podle

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{stat}}^2 + \sigma_{\text{sys}}^2} \quad (8)$$

### 3 Výsledky měření

#### 3.1 Podmínky měření

Teplota: 24,1°C

Relativní vlhkost vzduchu: 36,2%

Tlak vzduchu: 978,6 hPa

Místo: Praha

#### 3.2 Měření metodou kyvů

Hmotnost závaží  $m_z$  jsem vážil na laboratorních vahách s přesností 0,1 g. Bylo by obtížné a nepřesné měřit vzdálenost  $l$  přímo, rozdělil jsem tedy měření na více částí - měření průměru osy kola  $D$  posuvným měřidlem, měření vzdálenosti obvodu kola od obvodu osy kola  $l'$  pásovým měřidlem a měření výšky závaží  $h_z$  posuvným měřidlem. Pro vzdálenost  $l$  těžiště závaží od osy otáčení pak platí vztah

$$l = \frac{D}{2} + l' - \frac{h_z}{2} . \quad (9)$$

Kolo jsem vychýlil z rovnovážné polohy asi o 7°, abych změřil periodu kmitů  $T$ . Pro přesnější měření jsem měřil pět period. Při větším počtu period už bylo znatelné tlumení kmitů. Systematickou chybu měření periody odhaduji na 0,2 s. Systematická chyba měření délek je dána použitým měřidlem. Naměřené hodnoty, průměry a chyby veličin uvádím v tabulce 1.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty veličin pro metodu kyvů

č. měření	$m_z$ [g]	$l'$ [mm]	$D$ [mm]	$h_z$ [mm]	$5T$ [s]	$T$ [s]
1	148,5	239	12,25	24,15	12,1	
2		239	12,25	23,90	12,0	
3		239	12,15	23,90	12,1	
4		240	12,15	24,10	12,2	
5		239	12,20	23,80	12,2	
6					12,2	
průměr	148,5	239	12,20	24,0	12,1	2,43
$\sigma_{\text{stat}}$	0	0,4	0,04	0,1	0,07	
$\sigma_{\text{sys}}$	0,1	1	0,05	0,05	0,2	
$\sigma$	0,1	1	0,06	0,1	0,2	0,04

Určil jsem tak veličiny

$$m = (148,5 \pm 0,1)\text{g}$$

$$l' = (239 \pm 1)\text{mm}$$

$$D = (12,20 \pm 0,06)\text{mm}$$

$$h_z = (24,0 \pm 0,1)\text{mm}$$

$$T = (2,43 \pm 0,04)\text{s}$$

Po použití rovnice (9) získávám

$$l = (233 \pm 1)\text{mm} . \quad (10)$$

Podle rovnice (1) jsem určil moment setrvačnosti kola metodou kyvů. Za  $g$  jsem dosadil hodnotu pro Prahu  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

$$I = (43 \pm 2) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (11)$$

### 3.3 Měření metodou otáčení

Na analytických vahách jsem určil hmotnost pěti závaží.

$$\begin{aligned} m_1 &= (9,9715 \pm 0,0001)\text{g} \\ m_2 &= (14,9482 \pm 0,0001)\text{g} \\ m_3 &= (19,8979 \pm 0,0001)\text{g} \\ m_4 &= (29,9139 \pm 0,0001)\text{g} \\ m_5 &= (49,7961 \pm 0,0001)\text{g} \end{aligned}$$

Na kole jsou čtyři sousední válce s průměry  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Protože válce mají drážku, musel jsem nejdříve změřit vnější průměr válce  $d'_i$  a hloubku drážky  $h_i$ . Pro nejmenší váleček bylo možné  $d_1$  měřit přímo. Průměry větších válců jsem pak určil podle vzorce

$$d_i = d'_i - 2h_i, \quad i = 2, 3, 4. \quad (12)$$

Veličiny jsem měřil posuvným měřidlem se systematickou chybou 0,05 mm. Naměřené hodnoty, jejich průměry a chyby uvádím v tabulce 2.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty rozměrů sousedních válců

č. měření	$d_1$ [mm]	$d'_2$ [mm]	$d'_3$ [mm]	$d'_4$ [mm]	$h_2$ [mm]	$h_3$ [mm]	$h_4$ [mm]
1	59,70	102,45	140,30	180,25	1,40	0,55	0,50
2	59,70	102,45	140,30	180,25	1,50	0,50	0,45
3	59,70	102,40	140,35	180,20	1,55	0,50	0,50
4	59,80	102,40	140,35	180,25	1,65	0,55	0,50
5	59,75	102,45	140,30	180,20	1,60	0,55	0,55
prům	59,73	102,43	140,32	180,23	1,5	0,53	0,50
$\sigma_{\text{stat}}$	0,04	0,02	0,02	0,02	0,09	0,02	0,03
$\sigma_{\text{sys}}$	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$\sigma$	0,06	0,05	0,05	0,05	0,1	0,05	0,06

Využitím (12) jsem tedy určil veličiny

$$\begin{aligned} d_1 &= (59,73 \pm 0,06)\text{mm} \\ d_2 &= (99,4 \pm 0,2)\text{mm} \\ d_3 &= (139,3 \pm 0,1)\text{mm} \\ d_4 &= (179,2 \pm 0,1)\text{mm} \end{aligned}$$

Závaží jsem na niti navinul na sousední váleček. Poté jsem uvolnil brzdu na kole a pomocí počítačového programu zaznamenával aktuální úhlovou rychlost kola  $\omega$  v čase  $t$ . Totéž jsem opakovat pro celou sadu závaží a všechny válce. Pro závaží  $m_1$  na válkách  $d_1$  a  $d_2$  otáčení kola zřejmě nebylo rovnoměrně zrychlené, proto jsem tyto měření ze souboru všech měření vyřadil. Ze závislosti  $\omega$  na čase  $t$  jsem lineární regresí určil úhlové zrychlení  $\varepsilon$ . Hodnoty  $\varepsilon$ , chybu určení  $\sigma_\varepsilon$  a koeficient  $\alpha$  s chybou  $\sigma_\alpha$  spočtený podle (3) pro jednotlivé kombinace závaží a válců uvádím v tabulce 3. Ze vzorce (2) jsem určil nekorigované momenty setrvačnosti  $I^*$  pro kombinace závaží s válci a s chybou  $\sigma_{I^*}$  je uvádím také v tabulce 3.

Lineární regresí jsem určil veličiny  $I_k$  a  $M_T$  z rovnice (6).

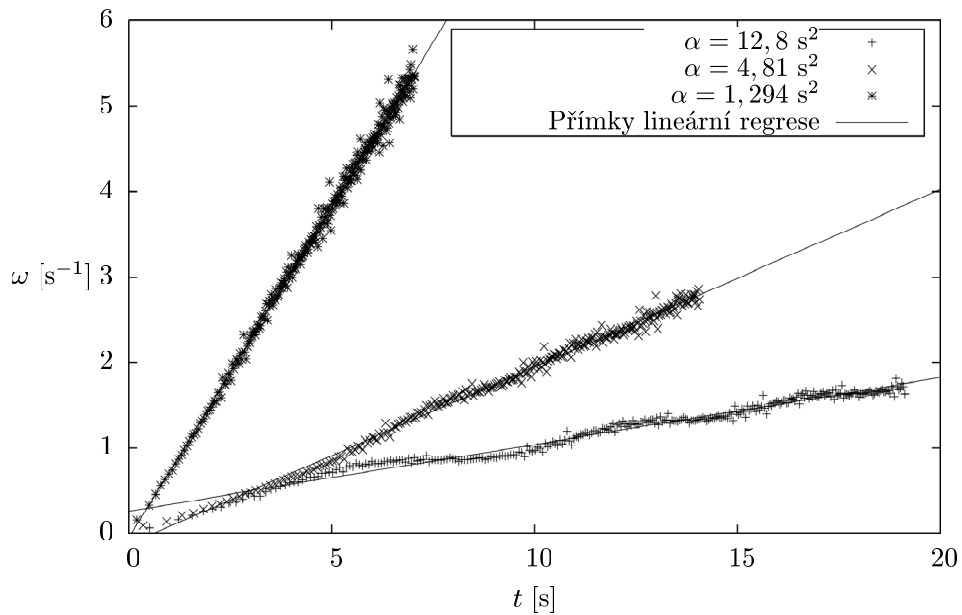
$$\begin{aligned} I_k &= (41,9 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \\ M_T &= (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ Nm} \end{aligned}$$

Závislost úhlové rychlosti  $\omega$  na čase  $t$  pro různé tři parametry  $\alpha$  je zobrazena v grafu 1. Závislost nekorigovaného momentu setrvačnosti  $I^*$  na parametru  $\alpha$  je zobrazena v grafu 2.

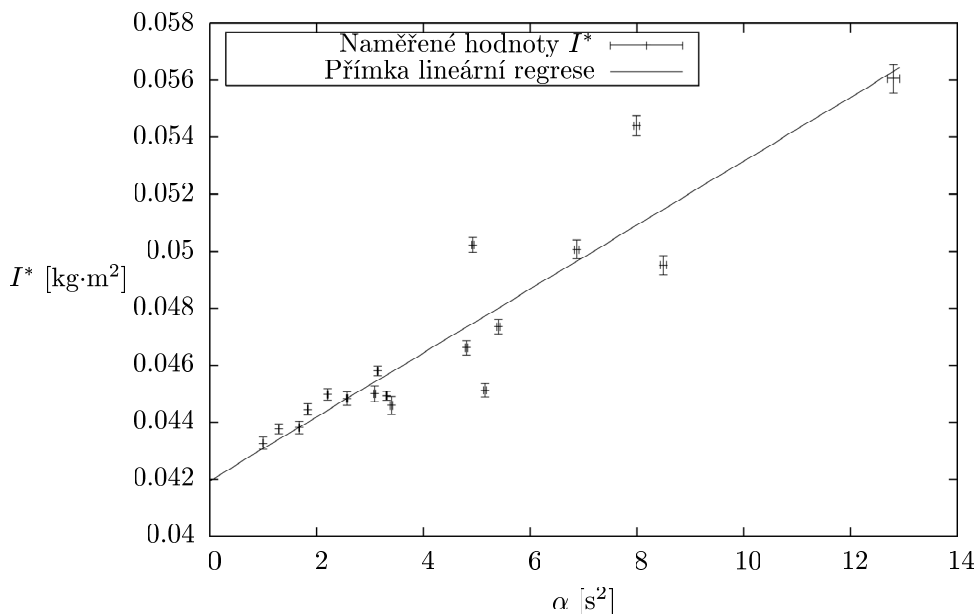
Tabulka 3: Hodnoty  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  a  $I^*$  podle závaží a válce

$m$ [g]	$d$ [mm]	$\varepsilon$ [s <sup>-2</sup> ]	$\sigma_\varepsilon$ [s <sup>-2</sup> ]	$\alpha$ [s <sup>2</sup> ]	$\sigma_\alpha$ [s <sup>2</sup> ]	$I^*$ [10 <sup>-3</sup> kg m <sup>2</sup> ]	$\sigma_{I^*}$ [10 <sup>-3</sup> kg m <sup>2</sup> ]
9,9715	139,3	0,1251	0,0008	7,99	0,05	54,4	0,3
9,9715	179,2	0,194	0,001	5,15	0,03	45,1	0,2
14,9482	59,73	0,0781	0,0007	12,8	0,1	56,1	0,5
14,9482	99,4	0,1455	0,0009	6,87	0,04	50,1	0,3
14,9482	139,3	0,203	0,001	4,93	0,02	50,2	0,2
14,9482	179,2	0,294	0,002	3,40	0,02	44,6	0,3
19,8979	59,73	0,1177	0,0008	8,50	0,06	49,5	0,3
19,8979	99,4	0,208	0,001	4,81	0,02	46,6	0,2
19,8979	139,3	0,302	0,001	3,31	0,01	44,9	0,2
19,8979	179,2	0,389	0,002	2,57	0,01	44,8	0,2
29,9139	59,73	0,185	0,001	5,41	0,03	47,3	0,3
29,9139	99,4	0,318	0,001	3,14	0,01	45,8	0,2
29,9139	139,3	0,453	0,002	2,21	0,01	45,0	0,2
29,9139	179,2	0,597	0,003	1,675	0,008	43,8	0,2
49,7961	59,73	0,324	0,002	3,09	0,02	45,0	0,3
49,7961	99,4	0,545	0,002	1,835	0,007	44,4	0,2
49,7961	139,3	0,773	0,003	1,294	0,005	43,8	0,2
49,7961	179,2	1,003	0,005	0,997	0,005	43,2	0,2

Graf 1: Závislost úhlové rychlosti na čase pro různé parametry  $\alpha$



Graf 2: Závislost nekorigovaného momentu setrvačnosti na parametru  $\alpha$



## 4 Diskuse výsledků

Při určování momentu setrvačnosti kola metodou kyvů k chybě nejvíce přispěla nepřesnost určení periody kyvů. Z důvodu tlumení kyvů nebylo možné měřit více period. Chybu způsobenou člověkem bychom mohli potlačit, pokud bychom k měření periody použili počítač podobně jako při měření úhlové rychlosti. Při určování periody kyvů jsem neuvažoval velikost úhlu vychýlení kola. Vzhledem k tomu, že jsem kolo vychyloval pouze o malé úhly, nebylo toto zpřesnění nutné.

Další nepřesnost při použití metody kyvů mohla být způsobena závažím. Uvažoval jsem, že jeho těžiště je v polovině jeho výšky, což nemusí být správně. Navíc rovnice (1) byla odvozena za předpokladu, že závaží je hmotný bod v těžišti závaží. Ve skutečnosti se však moment setrvačnosti závaží vzhledem k ose kola od momentu setrvačnosti hmotného bodu o stejné hmotnosti v těžišti závaží liší.

Z průběhu pro  $\alpha = 12,8 \text{ s}^2$  v grafu 1 je zřejmé, že pohyb kola nebyl rovnoměrně zrychlený. Ještě větší nerovnoměrnost byla v případě závaží  $m_1$  s průměry válců  $d_1$  a  $d_2$ , tyto průběhy jsem ze souboru měření vyřadil právě z tohoto důvodu. Nerovnoměrnost zrychlení byla pravděpodobně způsobena špatnou vyvážeností kola. V závislosti na aktuálním pootočení kola tak působil na kolo moment síly ve směru nebo proti směru působení momentu síly způsobeného závažím.

Měřené hodnoty nekorigovaného momentu setrvačnosti v grafu 2 odpovídají přímce lineární regrese pro menší hodnoty parametru  $\alpha$ , pro větší hodnoty se více odlišují.

Při měření jsem neuvažoval hmotnost nitě, na které bylo závaží zavěšeno, což mohlo mít vliv na správnost výsledků. Započítat vliv hmotnosti nitě by bylo obtížné, vzhledem k tomu, že se hmotnost nitě, která přispívá ke zrychlení otáčení kola, mění.

Moment setrvačnosti kola měřený metodou kyvů se v rámci chyby shoduje s momentem setrvačnosti měřeným metodou otáčení. Přesnější výsledek poskytla metoda otáčení.

## 5 Závěr

Metodou kyvů jsem určil moment setrvačnosti kola

$$I = (43 \pm 2) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 . \quad (13)$$

Pro různé hodnoty parametru  $\alpha$  jsem změřil moment setrvačnosti kola metodou otáčení, hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3. Závislost  $\omega = \omega(t)$  je pro tři odlišné hodnoty parametru  $\alpha$  znázorněna v grafu 1.

Určil jsem moment třecích sil

$$M_T = (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ Nm} \quad (14)$$

a moment setrvačnosti kola korigovaný na nulovou hodnotu tření

$$I_k = (41,9 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 . \quad (15)$$

Závislost nekorigovaného momentu  $I^*$  na parametru  $\alpha$  je znázorněna na grafu 2.

## Reference

- [1] English J.: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006