Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č.: VII

Název: Studium kmitů vázaných oscilátorů

Pracoval: Pavel Brožek stud. skup. 12 dne 25.4.2008

Odevzdal dne: ....

Hodnocení:..

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: .... dne ....

1 Pracovní úkol

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
   (a) $y_1 = y_2 = B$ … doba kmitu T_1
   (b) $y_1 = -y_2 = B$ … doba kmitu T_2
   (c) $y_1 = 0, y_2 = B$
      i. doba kmitu T_3
      ii. doba $\frac{T_4}{4}$ za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočtěte kruhové frekvence ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4, ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro 3 a 4.
4. Vypočtěte stupeň vazby κ.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

2 Teorie

Úhlová frekvence ω_0 kmitů fyzického kyvadla je dána vztahem

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \ , \tag{1}$$

kde D je direkční moment a I je moment setrvačnosti kyvadla. Pokud budeme mít dvě fyzická kyvadla vázaná slabou pružnou vazbou, bude jejich výchylka popsána rovnicemi

$$y_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t \tag{2}$$
$$y_2 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t - a_2 \cos \omega_2 t - b_2 \sin \omega_2 t \ , \tag{3}$$

kde a_1, a_2, b_1 a b_2 jsou konstanty a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}} \tag{4}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{I}} \ , \tag{5}$$

kde D^* je direkční moment pružiny.

1. Pokud kyvadla uvolníme z klidu v poloze $y_1 = y_2 = B$ a z rovnic (2) a (3) určíme konstanty, dostaneme
   $$y_1 = y_2 = B \cos \omega_1 t \ , \tag{6}$$
   vazba tedy na úhlovou frekvenci v tomto případě nemá vliv.
2. Pro uvolnění kyvadel z klidu v poloze $y_1 = -y_2 = B$ dostaneme závislosti
   $$y_1 = -y_2 = B \cos \omega_2 t \ . \tag{7}$$

3. Pro uvolnění kyvadel z klidu v poloze $y_1 = 0$, $y_2 = B$ dostaneme závislosti

$$y_1 = B \sin \omega_4 t \sin \omega_3 t \tag{8}$$
$$y_2 = B \cos \omega_4 t \cos \omega_3 t \ , \tag{9}$$

kde

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \tag{10}$$
$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \ . \tag{11}$$

Protože ω_4 je mnohem menší než ω_3, můžeme ω_3 považovat za úhlovou frekvenci kmitů a ω_4 za úhlovou frekvenci změn amplitudy.

Úhlové frekvence ω závisejí na periodě kmitů T podle vztahu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \ . \tag{12}$$

Stupeň vazby κ je dán vztahem

$$\kappa = \frac{D^*}{D + D^*} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \ . \tag{13}$$

Při počítání přenosu chyb a určování celkové chyby měření budu používat vzorce z [1]

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_\mu^2 \sigma_{x_i}^2 \tag{14}$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\mathrm{stat}}^2 + \sigma_{\mathrm{sys}}^2} \tag{15}$$

2.1 Pomůcky

Dvě kyvadla, pružiny, mechanismus pro uvolnění kyvadel, stopky, pásové měřidlo.

3 Výsledky měření

3.1 Podmínky měření

Teplota: $23,3°$C
Relativní vlhkost vzduchu: $37,5\%$
Tlak vzduchu: $996,5$ hPa
Místo: Praha

3.2 Měření

Nejdříve jsem ověřil, že obě kyvadla kmitají se stejnou periodou - obě kyvadla jsem bez vazby pustil se stejnou fází, a protože kyvadla zůstala ve fázi dostatečně dlouhou dobu, považuji periody jejich kmitů za stejné. Ve všech měřeních budu uvažovat systematickou chybu měření času jako reakční dobu člověka $0,2$ s. Pokud to bylo vhodné, měřil jsem více period najednou pro přesnější určení jedné periody.

Změřil jsem periody kmitů T_0 a T_0' prvního a druhého kyvadla. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1.

$$T_0 = (1,90 \pm 0,02) \text{ s}$$
$$T_0' = (1,90 \pm 0,02) \text{ s}$$

Tabulka 1: Periody kmitů kyvadel bez vazby

č. měření	$10T_0$ [s]	$10T_0'$ [s]	T_0 [s]	T_0' [s]
1	19,0	18,9	1,90	1,89
2	18,8	19,0	1,88	1,90
3	19,0	19,1	1,90	1,91
4	19,0	19,1	1,90	1,91
průměr			1,90	1,90
σ_{stat}			0,009	0,008
σ_{sys}	0,2	0,2	0,02	0,02
σ			0,02	0,02

Protože jsou periody kmitů kyvadel stejné, je stejná také úhlová frekvence ω_0 spočtená podle (12):

$$\omega_0 = (3,31 \pm 0,03)\ \mathrm{s}^{-1} \tag{16}$$

Dále jsem změřil periody vázaných kmitů pro dvě různé pružiny. Pružiny byly pro tato měření umístěny ve vzdálenosti $l = 43$ cm od závěsu kyvadla. Měření jsem prováděl za následujících počátečních podmínek:

1. $y_1 = y_2 = B$, $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ … doba kmitu T_1
2. $y_1 = -y_2 = B$, $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ … doba kmitu T_2
3. $y_1 = 0, y_2 = B$, $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$
   (a) doba kmitu T_3
   (b) doba $\frac{T_4}{4}$ za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly

Naměřené hodnoty period a úhlové frekvence vypočítané podle (12) jsou uvedeny v tabulce 2 pro první pružinu a v tabulce 3 pro druhou pružinu.

Tabulka 2: Periody kmitů a úhlové frekvence pro první pružinu

č. měření	$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]	$3T_3$ [s]	T_4 [s]	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	$T_4/4$ [s]
1	18,9	17,4	5,5	41,4	1,89	1,74	1,83	10,4
2	19,1	17,3	5,5	41,7	1,91	1,73	1,83	10,4
3	19,0	17,3	5,5	42,6	1,90	1,73	1,83	10,7
4	19,0	17,4	5,5	42,0	1,90	1,74	1,83	10,5
5			5,5				1,83	
6			5,5				1,83	
průměr					1,90	1,74	1,83	10,5
σ_{stat}					0,007	0,005	0,0	0,1
σ_{sys}	0,2	0,2	0,2	0,2	0,02	0,02	0,07	0,05
σ					0,02	0,02	0,07	0,1
ω					3,31	3,62	3,4	0,150
σ_ω					0,04	0,04	0,1	0,002

$$\begin{aligned} T_1 &= (1,90 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \\ T_2 &= (1,74 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \\ T_3 &= (1,83 \pm 0,07)\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

Tabulka 3: Periody kmitů a úhlové frekvence pro druhou pružinu

č, měření	$10T_1'$ [s]	$10T_2'$ [s]	$2T_3'$ [s]	T_4' [s]	T_1' [s]	T_2' [s]	T_3' [s]	$\frac{T_4'}{4}$ [s]
1	19,0	15,9	3,5	18,6	1,90	1,59	1,75	4,65
2	18,9	15,8	3,5	18,8	1,89	1,58	1,75	4,70
3	18,9	15,7	3,5	18,5	1,89	1,57	1,75	4,63
4	19,0	15,8	3,5	18,6	1,90	1,58	1,75	4,65
5			3,5				1,75	
6			3,5				1,75	
průměr					1,90	1,58	1,8	4,66
σ_{stat}					0,005	0,007	0,0	0,03
σ_{sys}	0,2	0,2	0,2	0,2	0,02	0,02	0,1	0,05
σ					0,02	0,02	0,1	0,06
ω					3,32	3,98	3,6	0,337
σ_ω					0,04	0,05	0,2	0,004

$$\frac{T_4}{4} = (10,5 \pm 0,1)\ \text{s}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (3,31 \pm 0,04)\ \text{s}^{-1} \\
\omega_2 &= (3,62 \pm 0,04)\ \text{s}^{-1} \\
\omega_3 &= (3,4 \pm 0,1)\ \text{s}^{-1} \\
\omega_4 &= (0,150 \pm 0,002)\ \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1' &= (1,90 \pm 0,02)\ \text{s} \\
T_2' &= (1,58 \pm 0,02)\ \text{s} \\
T_3' &= (1,8 \pm 0,1)\ \text{s} \\
\frac{T_4'}{4} &= (4,66 \pm 0,06)\ \text{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= (3,32 \pm 0,04)\ \text{s}^{-1} \\
\omega_2' &= (3,98 \pm 0,05)\ \text{s}^{-1} \\
\omega_3' &= (3,6 \pm 0,2)\ \text{s}^{-1} \\
\omega_4' &= (0,337 \pm 0,004)\ \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Ze vztahů (10) a (11) určím teoretické hodnoty úhlových frekvencí (označím $\tilde{\omega}_3$ a $\tilde{\omega}_4$, resp. čárkované pro druhou pružinu) pro porovnání s naměřenými hodnotami ω_3 a ω_4 (resp. čárkované pro druhou pružinu).

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_3 &= (3,47 \pm 0,03)\ \text{s}^{-1} \\
\tilde{\omega}_4 &= (0,16 \pm 0,03)\ \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_3' &= (3,65 \pm 0,03)\ \text{s}^{-1} \\
\tilde{\omega}_4' &= (0,33 \pm 0,03)\ \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Podle vztahu (13) jsem určil stupeň vazby pro obě pružiny:

$$\begin{aligned}
\kappa &= 0,09 \pm 0,02 \\
\kappa' &= 0,18 \pm 0,02
\end{aligned}$$

Pro druhou pružinu jsem změřil periody kmitů při různých vzdálenostech l zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 4.

Tabulka 4: Periody kmitů při použití druhé pružiny a různých l

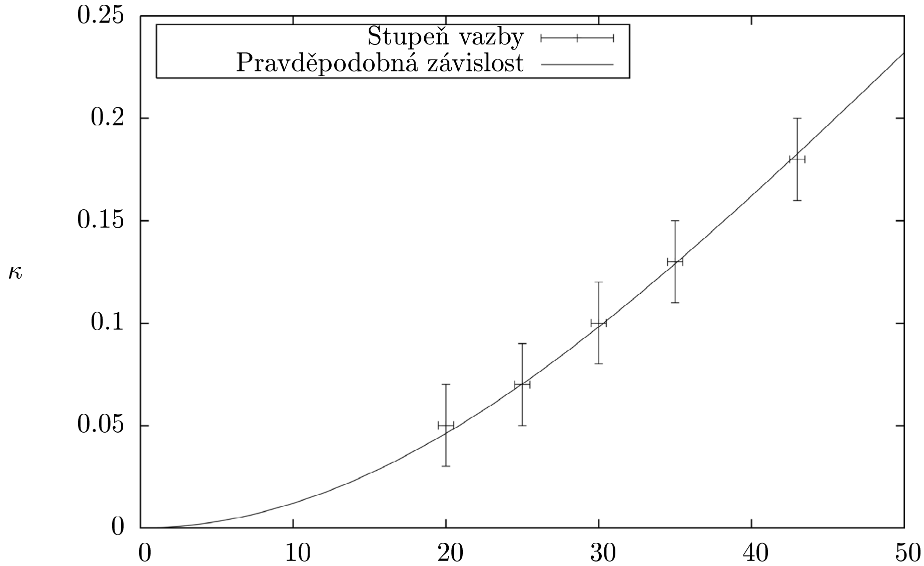
l	43 cm		35 cm		30 cm		25 cm		20 cm	
měř.	$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]	$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]	$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]	$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]	$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]
1	19,0	15,9	19,0	16,6	19,0	17,1	19,1	17,7	19,0	18,1
2	18,9	15,8	18,9	16,7	19,1	17,1	18,9	17,6	19,1	18,1
3	18,9	15,7	19,0	16,7	19,0	17,2	19,0	17,6	19,0	18,1
4	19,0	15,8	18,9	16,6	19,0	17,2	19,0	17,6	19,0	18,1
T	1,90	1,58	1,90	1,67	1,90	1,72	1,90	1,76	1,90	1,81
σ_{stat}	0,005	0,007	0,005	0,005	0,004	0,005	0,007	0,004	0,004	0
σ_{sys}	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
σ	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
ω	3,32	3,98	3,32	3,77	3,30	3,66	3,31	3,56	3,30	3,47
σ_ω	0,04	0,05	0,04	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
k	0,18		0,13		0,10		0,07		0,05	
σ_k	0,02		0,02		0,02		0,02		0,02	

Vztah (13) můžeme upravit:

$$\kappa = \frac{D^*}{D + D^*} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{D^*}{D}} \ , \tag{17}$$

kde pouze D^* může být závislé na l. Naměřeným hodnotám stupně vazby velmi dobře odpovídá závislost $D^* = kl^2$, kde k je konstanta. Závislost stupně vazby κ na délce l a křivka proložená naměřenými hodnotami odpovídající pravděpodobné závislosti jsou znázorněny na grafu 1.

Graf 1: Závislost stupně vazby k na vzdálenosti zavěšení pružiny od závěsu kyvadla



4 Diskuse výsledků

Z tabulky 4 je zřejmé, že všechny naměřené hodnoty T_1 jsou přibližně stejné a rovnají se T_0, nezávisí tedy na tom, jestli jsou kyvadla vázána a v jakém místě je pružina. To odpovídá předpokládané teoretické rovnosti $\omega_1 = \omega_0$.

Naměřené hodnoty ω_3 a ω_4 v rámci chyb odpovídají hodnotám vypočteným z ω_1 a ω_2. Pro určení periody jednoho kmitu pro tyto počáteční podmínky je přesnější výpočet z hodnot ω_1 a ω_2 než přímé měření. To je způsobeno tím, že vzhledem k měnící se amplitudě kmitů není možné měřit mnoho kmitů za sebou. Určit dobu za kterou si kyvadla vymění energii je přesnější měřením, protože při výpočtu se od sebe odečítají blízká čísla, čímž se velmi zvyšuje relativní chyba.

Pro určení funkční závislosti stupně vazby κ na vzdálenosti l by bylo nutné znát závislost D^* na l. Je pravděpodobné, že tato závislost je mocninná. Naměřeným hodnotám podle metody nejmenších čtverců nejvíce odpovídá závislost $D^* \sim l^{1,91}$. Pokud je závislost opravdu mocninná, pak je tedy pravděpodobně $D^* \sim l^2$.

Všechny periody byly měřeny stopkami, což byl zřejmě největší zdroj chyb. Tyto chyby bychom mohli eliminovat, pokud bychom pro měření period kmitů použili elektronický snímač.

5 Závěr

Změřil jsem dobu kmitu dvou stejných nevázaných kyvadel

$$\begin{aligned} T_0 &= (1,90 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \\ T_0' &= (1,90 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

Změřil jsem doby kmitů kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou (realizovanou dvěma různými pružinami) vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:

1. $y_1 = y_2 = B$:

$$\begin{aligned} T_1 &= (1,90 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \\ T_1' &= (1,90 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

2. $y_1 = -y_2 = B$:

$$\begin{aligned} T_2 &= (1,74 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \\ T_2' &= (1,58 \pm 0,02)\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

3. $y_1 = 0, y_2 = B$

   (a) doba kmitu:

$$\begin{aligned} T_3 &= (1,83 \pm 0,07)\ \mathrm{s} \\ T_3' &= (1,8 \pm 0,1)\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

   (b) doba $\frac{T_4}{4}$ za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly:

$$\begin{aligned} \frac{T_4}{4} &= (10,5 \pm 0,1)\ \mathrm{s} \\ \frac{T_4'}{4} &= (4,66 \pm 0,06)\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

Vypočítal jsem příslušné úhlové frekvence ω_i k dobám T_i pro dvě různé pružiny:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= (3,31 \pm 0,03)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_1 &= (3,31 \pm 0,04)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_2 &= (3,62 \pm 0,04)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_3 &= (3,4 \pm 0,1)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_4 &= (0,150 \pm 0,002)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\\
\omega_1' &= (3,32 \pm 0,04)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_2' &= (3,98 \pm 0,05)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_3' &= (3,6 \pm 0,2)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_4' &= (0,337 \pm 0,004)\ \mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Platnost vztahů (10) a (11) jsem ověřil výpočtem $\tilde{\omega}_3$ a $\tilde{\omega}_4$ pro obě pružiny:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_3 &= (3,47 \pm 0,03)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\tilde{\omega}_4 &= (0,16 \pm 0,03)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\\
\tilde{\omega}_3' &= (3,65 \pm 0,03)\ \mathrm{s}^{-1} \\
\tilde{\omega}_4' &= (0,33 \pm 0,03)\ \mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Vypočítal jsem stupně vazby κ pro obě pružiny při vzdálenosti $l = 43$ cm zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla:

$$\begin{aligned}
\kappa &= 0,09 \pm 0,02 \\
\kappa' &= 0,18 \pm 0,02
\end{aligned}$$

Pro druhou pružinu jsem změřil závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla, hodnoty jsem uvedl v tabulce 4. Závislost je znázorněna na grafu 1.

Reference

[1] Englich J.: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006