

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č.: IX

Název: Měření modulu pružnosti v tahu

Pracoval: Pavel Brožek

stud. skup. 12

dne 29.2.2008

Odevzdal dne:

Hodnocení:

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne

1 Pracovní úkol

1. Změřte modul pružnosti v tahu F oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete užitím lineární regrese.

2 Teorie

2.1 Měření modulu pružnosti v tahu z protažení drátu

Jestliže na drát délky l_0 a průřezu S působí síla F a napětí $\sigma = \frac{F}{S}$ je menší než mez úměrnosti pro drát, je podle [1]

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (1)$$

kde Δl je přírůstek délky drátu a E je Youngův modul pružnosti. Prodloužení Δl měříme zrcátkovou metodou. Drát je veden přes kladku o poloměru r (průměru D) k misce, na kterou pokládáme závaží. Na kladce je upevněné zrcátko, které se při zatížení pootočí o úhel $\Delta\alpha$. Platí

$$\Delta l = r\Delta\alpha. \quad (2)$$

Ve vzdálenosti L od zrcátka je umístěna stupnice a dalekohled s ryskou. Při počátečním zatížení 1 kg v dalekohledu vidíme dílek n_0 , při zatížení hmotností Δm dílek n . Označíme

$$\Delta n = n_0 - n. \quad (3)$$

Protože úhel $\Delta\alpha$ je dostatečně malý, přibližně platí vztah

$$2\Delta\alpha = \frac{\Delta n}{L}. \quad (4)$$

Síla je realizována tíhou závaží

$$F = \Delta mg. \quad (5)$$

Pokud průřez drátu S vyjádříme pomocí jeho průměru d a z (1) vyjádříme modul pružnosti E , získáme pro modul pružnosti E vztah

$$E = \frac{16gl_0L\Delta m}{\pi d^2 D\Delta n}. \quad (6)$$

Δn je přímo úměrné Δm , konstantu úměrnosti označíme c .

$$\Delta n = c\Delta m. \quad (7)$$

2.2 Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu trámku

Na břity vzdálené l položíme trámek obdélníkového průřezu o šířce a a výšce b . Trámek uprostřed zatížíme závažím Δm , na trámek tak působí síla

$$F = \Delta mg. \quad (8)$$

Pomocí objektivového mikrometru určujeme průhyb trámku y . Průhyb před zatížením označíme y_0 a označíme

$$\Delta y = y - y_0. \quad (9)$$

Podle [1] platí

$$\Delta y = \frac{Fl^3}{48EI_p}, \quad (10)$$

kde I_p je plošný moment. Pro trámek je

$$I_p = \frac{ab^3}{12}. \quad (11)$$

Z (10) vyjádříme modul pružnosti E a dosazením za F a I_p získáme

$$E = \frac{gl^3 \Delta m}{4ab^3 \Delta y}. \quad (12)$$

Δy je přímo úměrné Δm , konstantu úměrnosti označíme c' .

$$\Delta y = c' \Delta m \quad (13)$$

2.3 Pomůcky

Zařízení pro napnutí drátu přes kladku se zrcátkem, dalekohled s ryskou a stupnicí, drát s miskou, sada závaží, ocelový a mosazný trámek, aparatura pro měření průhybu trámku s objektivovým mikrometrem, pásové měřidlo, posuvné měřidlo, mikrometr.

3 Výsledky měření

3.1 Podmínky měření

Teplota: 24,0°C

Relativní vlhkost vzduchu: 38,9%

Tlak vzduchu: 985,9 hPa

Místo: Praha

3.2 Měření protažení drátu

Průměr drátu d jsem měřil na různých místech pomocí mikrometru o nejmenším dílku 0,01mm. Systematickou chybu odhaduji na 0,01mm. Průměr kladky D jsem měřil posuvným měřidlem o nejmenším dílku 0,05mm, systematickou chybu odhaduji na 0,1mm. Délku drátu l_0 a vzdálenost zrcátka od stupnice L jsem měřil pásovým měřidlem, systematickou chybu odhaduji na 0,5cm. Podle [2] určím celkovou chybu měření jako

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{stat}}^2 + \sigma_{\text{sys}}^2} \quad (14)$$

Naměřené hodnoty veličin, jejich průměry, směrodatné odchylky σ_{stat} , systematické chyby σ_{sys} a celkové chyby σ jsou uvedeny v tabulce 1. Určil jsem tedy následující veličiny:

$$d = (0,51 \pm 0,01)\text{mm}$$

$$D = (38,6 \pm 0,1)\text{mm}$$

$$l_0 = (114,0 \pm 0,5)\text{cm}$$

$$L = (97,8 \pm 0,5)\text{cm}$$

Drát jsem nejdříve zatížil závažím o hmotnosti 1kg a dále zatěžoval závažími o hmotnostech 100g. Hmotnost závaží považuji za přesnou. Odečítání dílku n ze stupnice přes dalekohled bylo nepřesné, protože dílek na rysce byl různý pokud jsem se do dalekohledu díval z mírně odlišného úhlu než přímého. Nepřesnost také zvyšovalo chvění rysky na stupnici. Systematickou chybu měření n odhaduji na 1mm, pro každý rozdíl $n_0 - n$ je tedy chyba 2mm. V tabulce 2 jsou uvedeny naměřené hodnoty n při přidávání závaží, hodnoty n' při odeírání závaží a průměr těchto dvou hodnot \bar{n} pro příslušné zatížení m .

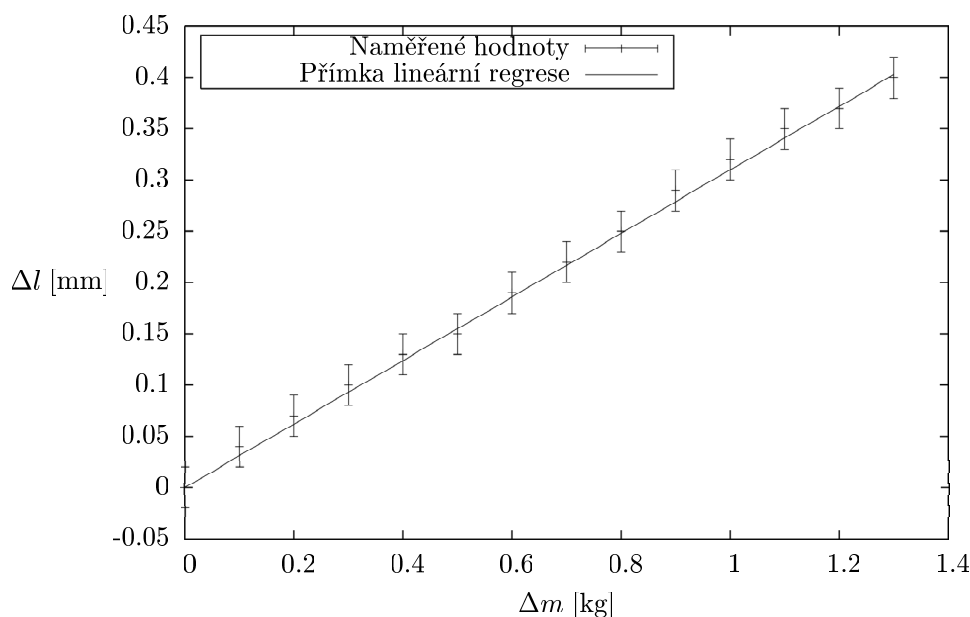
Tabulka 1: Naměřené hodnoty d , D , l_0 a L

č. měření	d [mm]	D [mm]	l_0 [cm]	L [cm]
1	0,51	38,50	114,0	97,8
2	0,51	38,55	114,0	97,7
3	0,51	38,65	114,0	97,8
4	0,51	38,55		97,8
5	0,51	38,50		97,7
6	0,51	38,55		97,7
7	0,52	38,55		
8	0,52	38,55		
9	0,51	38,60		
10	0,51	38,55		
průměr	0,51	38,6	114,0	97,8
σ_{stat}	0,004	0,04	0	0,05
σ_{sys}	0,01	0,1	0,5	0,5
σ	0,01	0,1	0,5	0,5

Tabulka 2: Naměřené hodnoty prodloužení drátu

m [kg]	Δm [kg]	n [cm]	n' [cm]	\bar{n} [cm]	Δn [cm]
1,0	0,0	42,7	42,5	42,6	0,0
1,1	0,1	42,3	42,2	42,25	0,4
1,2	0,2	42,0	41,9	41,95	0,7
1,3	0,3	41,7	41,6	41,65	1,0
1,4	0,4	41,4	41,3	41,35	1,3
1,5	0,5	41,1	41,1	41,10	1,5
1,6	0,6	40,8	40,7	40,75	1,9
1,7	0,7	40,4	40,4	40,40	2,2
1,8	0,8	40,1	40,1	40,10	2,5
1,9	0,9	39,8	39,7	39,75	2,9
2,0	1,0	39,5	39,4	39,45	3,2
2,1	1,1	39,1	39,1	39,10	3,5
2,2	1,2	38,8	38,8	38,80	3,8
2,3	1,3	38,5	38,5	38,50	4,1

Graf 1: Závislost prodloužení drátu na přidaném závaží



Lineární regresi jsem určil koeficient c ve vztahu $\Delta n = c\Delta m$:

$$c = (3,17 \pm 0,07)\text{cm} \cdot \text{kg}^{-1} \quad (15)$$

Závislost prodloužení drátu Δl na zatížení Δm je znázorněna v grafu 1.

Modul pružnosti oceli v tahu získaný měřením protažení drátu označím E_{o1} . Do vztahu pro E_{o1} dosadím tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, což s dostatečnou přesností odpovídá tíhovému zrychlení v Praze. Chybu E_{o1} jsem určil podle [2] ze vzorce:

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu}^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (16)$$

Modul pružnosti oceli v tahu je

$$E_{o1} = (175 \pm 8)\text{GPa} . \quad (17)$$

3.3 Měření průhybu trámku

Šířku a_o a výšku b_o ocelového trámku (resp. a_m a b_m mosazného trámku) jsem měřil mikrometrem, vzdálenost břitů l pásovým měřidlem. Naměřené hodnoty, aritmetické průměry, statistické chyby σ_{stat} , odhady systematických chyb σ_{sys} a celkové chyby σ veličin uvádím v tabulce 3.

Určil jsem tak následující veličiny:

$$a_o = (11,90 \pm 0,06)\text{mm}$$

$$b_o = (2,98 \pm 0,01)\text{mm}$$

$$a_m = (11,87 \pm 0,06)\text{mm}$$

$$b_m = (1,99 \pm 0,01)\text{mm}$$

$$l = (41,1 \pm 0,1)\text{cm}$$

Aby výchylka trámku při zatížení byla měřitelná a zároveň byla přímo úměrná hmotnosti závaží, zvětšoval jsem zátěž v případě ocelového trámku o 100g a v případě mosazného trámku o 10g. Při zatěžování jsem v objektivovém mikroskopu odčítal dílky y , při odebrání závaží dílky y' .

Tabulka 3: Naměřené hodnoty a , b a l

č. měření	a_o [mm]	b_o [mm]	a_m [mm]	b_m [mm]	l [cm]
1	11,92	2,98	11,86	1,99	41,1
2	11,90	2,98	11,80	1,99	41,0
3	11,89	2,97	11,79	1,99	41,1
4	11,94	2,97	11,81	1,98	41,1
5	11,72	2,97	11,82	1,99	41,1
6	11,92	2,98	11,94	1,98	
7	11,94	2,97	11,95	1,98	
8	11,86	2,99	11,92	1,99	
9	11,94	2,98	11,89	1,98	
10	11,94	2,98	11,91	1,99	
průměr	11,90	2,98	11,87	1,99	41,1
σ_{stat}	0,06	0,006	0,06	0,005	0,04
σ_{sys}	0,01	0,01	0,01	0,01	0,1
σ	0,06	0,01	0,06	0,01	0,1

Pro dané zatížení jsem určil průměr y hodnot y a y' . Hmotnost závaží považuji za přesnou, systematickou chybu měření výchylky y odhaduji na 0,1mm, veličina Δy je tedy měřena s chybou 0,2mm. Naměřené hodnoty pro ocelový trámeček jsou uvedeny v tabulce 4, pro mosazný trámeček jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 4: Naměřené hodnoty prohnutí ocelového trámku

Δm [g]	y [mm]	y' [mm]	\bar{y} [mm]	Δy [mm]
0	1,6	1,6	1,6	0,0
100	1,8	1,9	1,85	0,3
200	2,1	2,1	2,1	0,5
300	2,4	2,4	2,4	0,8
400	2,6	2,7	2,65	1,1
500	2,9	3,0	2,95	1,4
600	3,2	3,2	3,2	1,6
700	3,5	3,5	3,5	1,9
800	3,7	3,7	3,7	2,1
900	4,0	4,0	4,0	2,4
1000	4,3	4,3	4,3	2,7

Konstantu c'_o z rovnice (13) pro ocel (resp. c'_m pro mosaz) jsem určil lineární regresí:

$$c'_o = (2,7 \pm 0,1)\text{mm} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$c'_m = (17,7 \pm 0,4)\text{mm} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Závislost výchylky Δy na zatížení Δm oceli a mosazi je znázorněna v grafu 2.

Modul pružnosti oceli (resp. mosazi) v tahu určený měřením prohnutí trámku označím E_{o2} (resp. E_m). Chybu jsem určil opět podle vzorce (16).

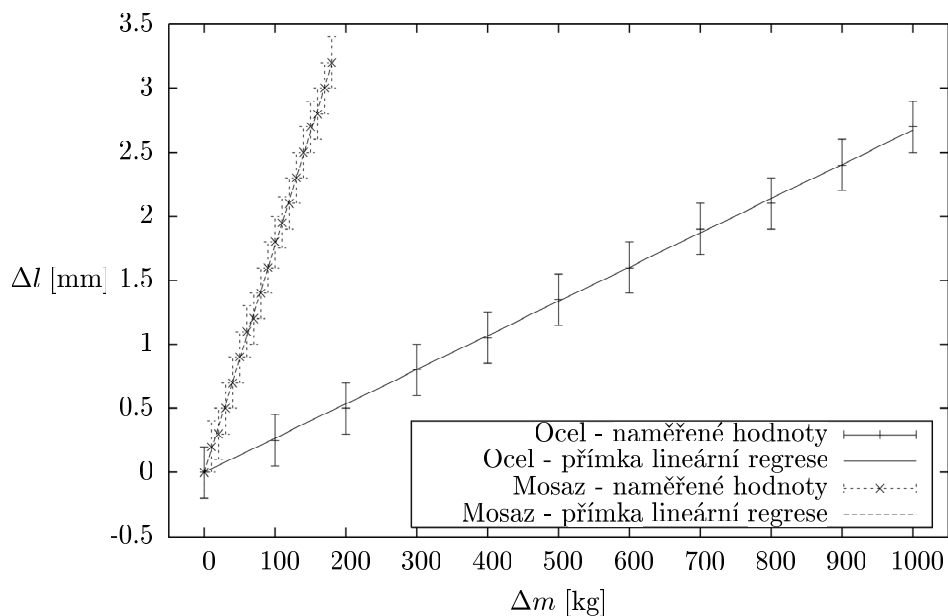
$$E_{o2} = (200 \pm 8)\text{GPa}$$

$$E_m = (103 \pm 3)\text{GPa}$$

Tabulka 5: Naměřené hodnoty prohnutí mosazného trámku

Δm [g]	y [mm]	y' [mm]	y [mm]	Δy [mm]
0	5,7	5,7	5,7	0,0
10	5,9	5,9	5,9	0,2
20	6,0	6,0	6,0	0,3
30	6,2	6,2	6,2	0,5
40	6,4	6,4	6,4	0,7
50	6,6	6,6	6,6	0,9
60	6,8	6,8	6,8	1,1
70	6,9	6,9	6,9	1,2
80	7,1	7,1	7,1	1,4
90	7,3	7,3	7,3	1,6
100	7,5	7,5	7,5	1,8
110	7,6	7,7	7,65	2,0
120	7,8	7,8	7,8	2,1
130	8,0	8,0	8,0	2,3
140	8,2	8,2	8,2	2,5
150	8,4	8,4	8,4	2,7
160	8,5	8,5	8,5	2,8
170	8,7	8,7	8,7	3,0
180	8,9	8,9	8,9	3,2

Graf 2: Závislost prohnutí ocelového a mosazného trámku na zatížení



4 Diskuse výsledků

Z grafů je dobře patrné, že výsledky měření odpovídají předpokladu, že pokud je síla dostatečně malá, pak prodloužení drátu (resp. prohnutí trámku) je přímo úměrné působící síle. Deformace byla pružná, protože při zatěžování a odebírání závaží se hodnoty lišily pouze v rámci systematické chyby. Při měření šířky trámků byla statistická chyba velká vzhledem k chybě systematické, zřejmě byla způsobena nerovnoměrnou šířkou trámků. Tato nepřesnost však neměla zásadní vliv na přesnost určení modulu pružnosti.

Hodnoty modulu pružnosti oceli měřené dvěma metodami se neshodují ani v rámci chyb, to je pravděpodobně způsobeno tím, že drát je vyroben z jiné oceli než trámek. V tabulkách [3] je pro ocel uvedena hodnota modulu pružnosti v tahu $E = 210$ GPa a pro různé oceli rozsah 160 GPa až 220 GPa, což je v souladu s určenými hodnotami.

Pro mosaz je v [3] uvedena hodnota $E = 100$ GPa, což v rámci chyby odpovídá určené hodnotě.

Při měření protažení drátu se na chybě nejvíce projevila chyba měření průměru drátu d a určení koeficientu c , tedy měření dílku n . Při měření prohnutí trámků měla na chybu určení modulu pružnosti největší vliv chyba určení koeficientu c' , tedy měření dílku y . Protože dochází ke chvění zrcátka a trámků, není možné příliš zmenšit systematickou chybu měření n a l . Pro přesnější měření by bylo nutné kmity tlumit a použít jemnější stupnice.

5 Závěr

Měřením protažení drátu jsem určil modul pružnosti v tahu ocelového drátu

$$E_{o1} = (175 \pm 8)\text{GPa} . \quad (18)$$

Měřením průhybu trámku jsem určil modul pružnosti v tahu ocelového trámku

$$E_{o2} = (200 \pm 8)\text{GPa} \quad (19)$$

a mosazného trámku

$$E_m = (103 \pm 3)\text{GPa}. \quad (20)$$

Reference

- [1] Kvasnica J. a kol.: Mechanika, Academia, Praha 2004
- [2] Englich J.: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006
- [3] Mikulčák J.: Tabulky a vzorce, Prometheus, Praha 2006