

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č.: II

Název: Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru

Pracoval: Pavel Brožek

stud. skup. 12

dne 17.3.2008

Odevzdal dne: .....

Hodnocení: .....

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
<b>Celkem</b>	max. 20	

Posuzoval: ..... dne .....

# 1 Pracovní úkol

1. Změřte tuhost  $k$  pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle  $y = i(F)$
3. Změřte tuhost  $k$  pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení  $g$ .
5. Sestrojte grafy závislostí:
  - (a)  $\omega = f(\sqrt{k})$
  - (b)  $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$
6. Při zpracování použijte lineární regresi.

# 2 Teorie

Při zatížení pružiny tuhosti  $k$  hmotností  $m$  a ustálení v rovnovážné poloze bude výsledná síla působící na závaží nulová. Na závaží působí tíhová síla a síla pružiny, platí tedy

$$mg - k\Delta y = 0, \quad (1)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení a  $\Delta y$  prodloužení pružiny. Tuhost pružiny statickou metodou můžeme určit tak, že z rovnice (1) vyjádříme  $\Delta y$ , které při zatížení hmotností  $m$  budeme měřit vzhledem k nezatíženému stavu. Pokud označíme

$$i = \frac{1}{k} \quad (2)$$

můžeme  $i$  lineární regresi určit pomocí vzorce

$$\Delta y = img \quad (3)$$

a vypočítat z něj tuhost  $k$ .

Tuhost pružiny  $k'$  můžeme měřit také metodou dynamickou, kdy měříme periodu kmitů  $T$  při zatížení hmotností  $m$ . Pro úhlovou frekvenci  $\omega$  totiž platí vztahy

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} \quad (4)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (5)$$

Ze vztahů (4) a (5) vyjádříme  $k'$  v závislosti na  $T$ :

$$k' = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad (6)$$

Tíhové zrychlení můžeme vypočítat využitím toho, že tuhost pružiny měřená dvěma různými metodami by měla být stejná, tedy  $k' = k$ . Z rovnic (1) a (6) tak získáme vyjádření tíhového zrychlení

$$g = \frac{4\pi^2 \Delta y}{T^2} \quad (7)$$

Při sestrovování grafu závislosti  $\omega = f(\sqrt{k})$  zvolíme konstantní velikost zatížení a budeme sledovat úhlovou rychlost kmitání různých pružin s tuhostmi  $k$  určenými statickou metodou. Podobně při

sestrojování grafu závislosti  $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$  zvolíme jednu pružinu, budeme měnit její zatížení  $m$  a sledovat úhlovou rychlost kmitání.

Chyby určuji podle [1]. Při určování veličiny  $a$  jako aritmetického průměru  $n$  hodnot  $a_i$  určím chybu průměru  $\sigma_a$  jako

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - a)^2} \quad (8)$$

Přenos chyb počítám podle vzorce

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (9)$$

## 2.1 Pomůcky

Pružiny, háček na zavěšení pružiny, digitální stopky, katetometr, závaží.

## 3 Výsledky měření

### 3.1 Podmínky měření

Teplota: 22,6°C

Relativní vlhkost vzduchu: 32,0%

Tlak vzduchu: 977,6 hPa

Místo: Praha

### 3.2 Měření tuhosti statickou metodou

Polohu nezatížené pružiny označím  $y_0$ , zatížené  $y$  a jejich rozdíl  $\Delta y = y_0 - y$ . Pružiny jsem zatěžoval tak, aby jejich prodloužení bylo dobře měřitelné a přitom výchylka  $\Delta y$  byla přímo úměrná síle působící na pružinu. Hmotnost  $m$  závaží považuji za přesnou, protože na nepřesnost měření má větší vliv chyba měření prodloužení (resp. času při dynamické metodě). Protáhnutí pružiny jsem měřil katetometrem, naměřené hodnoty pro pružiny 1 až 5 jsou uvedeny v tabulce 1. Vzhledem k otřesům a nepřesnosti určení stejného bodu pružiny v dalekohledu bylo určení výchylky poměrně nepřesné, chybu měření výchylky  $y$  odhaduji na 1 mm, chyba rozdílu  $\Delta y$  je tedy 2 mm.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty prodloužení pružin

$m$ [g]	$y_1$ [mm]	$\Delta y_1$ [mm]	$y_2$ [mm]	$\Delta y_2$ [mm]	$y_3$ [mm]	$\Delta y_3$ [mm]	$y_4$ [mm]	$\Delta y_4$ [mm]	$y_5$ [mm]	$\Delta y_5$ [mm]
0	464,3	0,0	443,6	0,0	405,1	0,0	445,0	0,0	385,5	0,0
20	415,1	49,2	412,6	31,0						
40	368,3	96,0	381,0	62,6	351,4	53,7				
80	275,3	189,0	319,9	123,7	297,2	107,9			345,0	40,5
100	227,6	236,7	288,4	155,2	269,6	135,5	422,8	22,2	335,3	50,2
120	184,7	279,6	256,9	186,7	242,4	162,7	418,3	26,7	324,5	61,0
150	116,5	347,8	211,1	232,5	201,7	203,4	412,3	32,7	309,4	76,1
200	6,0	458,3	134,8	308,8	134,9	270,2	401,7	43,3	283,8	101,7
250							391,0	54,0		
400							361,7	83,3		

Koeficient  $i$  jsem určil z rovnice (3) lineární regrese. Při výpočtech jsem pro Prahu podle [2] používal tíhové zrychlení  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

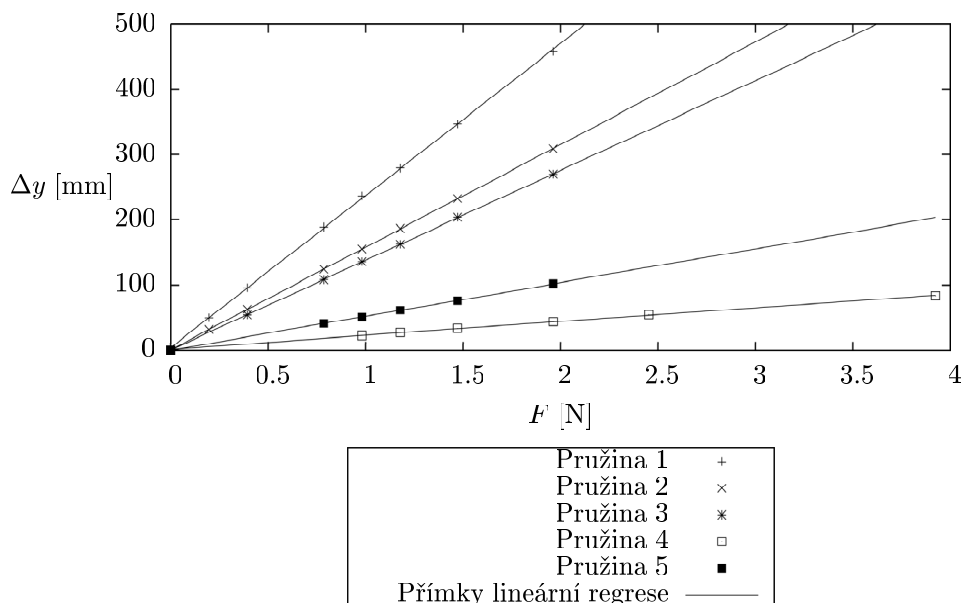
$$\begin{aligned} i_1 &= (234 \pm 2) \cdot 10^{-3} \text{ mN}^{-1} \\ i_2 &= (157,6 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ mN}^{-1} \\ i_3 &= (138,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-3} \text{ mN}^{-1} \\ i_4 &= (21,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ mN}^{-1} \\ i_5 &= (51,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-3} \text{ mN}^{-1} \end{aligned}$$

Podle (2) jsem určil tuhosti pružin  $k$  statickou metodou:

$$\begin{aligned} k_1 &= (4,27 \pm 0,04) \text{ Nm}^{-1} \\ k_2 &= (6,35 \pm 0,02) \text{ Nm}^{-1} \\ k_3 &= (7,25 \pm 0,04) \text{ Nm}^{-1} \\ k_4 &= (47,2 \pm 0,9) \text{ Nm}^{-1} \\ k_5 &= (19,3 \pm 0,3) \text{ Nm}^{-1} \end{aligned}$$

Závislost prodloužení pružiny na působící síle je pro všechny pružiny znázorněna v grafu 1.

Graf 1: Závislost protažení pružin na působící síle



### 3.3 Měření tuhosti dynamickou metodou

Periodu kmitů jsem pro danou hmotnost a pružinu měřil vždy dvakrát, abych vyloučil hrubou chybu způsobenou například špatným počítáním počtu period. Naměřené hodnoty period  $T$  jsou pro všech pět pružin uvedeny v tabulce 2. Tuhosti pružin  $k'$  a tíhové zrychlení  $g$  spočítané z každého měření jsou také uvedeny v tabulce 2.

Tuhost jednotlivých pružin jsem určil jako aritmetický průměr naměřených tuhostí při různých zatíženích.

$$k'_1 = (4,3 \pm 0,2) \text{ Nm}^{-1}$$

Tabulka 2: Naměřené periody kmitů  $T$ , spočtené tuhosti  $k'$  a tíhové zrychlení  $g$

$m$ [g]	$20T_1$ [s]	$T_1$ [s]	$k'_1$ [Nm <sup>-1</sup> ]	$g$ [ms <sup>-2</sup> ]	$m$ [g]	$20T_2$ [s]	$T_2$ [s]	$k'_2$ [Nm <sup>-1</sup> ]	$g$ [ms <sup>-2</sup> ]
20	8,9	0,45	3,99	9,81	20	7,3	0,37	5,93	9,19
20	8,8	0,44	4,08	10,03	20	7,4	0,37	5,77	8,94
40	12,4	0,62	4,11	9,86	40	10,2	0,51	6,07	9,50
40	12,5	0,63	4,04	9,70	40	10,2	0,51	6,07	9,50
80	17,4	0,87	4,17	9,86	80	14,2	0,71	6,27	9,69
80	17,3	0,87	4,22	9,97	80	14,3	0,72	6,18	9,55
100	19,3	0,97	4,24	10,03	100	16,0	0,80	6,17	9,57
100	19,2	0,96	4,28	10,14	100	16,0	0,80	6,17	9,57
120	21,0	1,05	4,30	10,01	120	17,5	0,88	6,19	9,63
120	21,0	1,05	4,30	10,01	120	17,4	0,87	6,26	9,74
150	23,1	1,16	4,44	10,29	150	19,4	0,97	6,29	9,76
150	23,2	1,16	4,40	10,20	150	19,5	0,98	6,23	9,66
200	26,1	1,31	4,64	10,62	200	22,3	1,12	6,35	9,81
200	26,0	1,30	4,67	10,71	200	22,3	1,12	6,35	9,81
$m$ [g]	$20T_3$ [s]	$T_3$ [s]	$k'_3$ [Nm <sup>-1</sup> ]	$g$ [ms <sup>-2</sup> ]	$m$ [g]	$40T_4$ [s]	$T_4$ [s]	$k'_4$ [Nm <sup>-1</sup> ]	$g$ [ms <sup>-2</sup> ]
40	9,8	0,49	6,58	8,83	100	12,0	0,30	43,86	9,74
40	9,7	0,49	6,71	9,01	100	12,0	0,30	43,86	9,74
80	13,4	0,67	7,04	9,49	120	12,9	0,32	45,55	10,13
80	13,5	0,68	6,93	9,35	120	13,0	0,33	44,85	9,98
100	15,0	0,75	7,02	9,51	150	14,6	0,37	44,45	9,69
100	15,0	0,75	7,02	9,51	150	14,6	0,37	44,45	9,69
120	16,4	0,82	7,05	9,55	200	16,8	0,42	44,76	9,69
120	16,4	0,82	7,05	9,55	200	16,7	0,42	45,30	9,81
150	18,3	0,92	7,07	9,59	250	18,8	0,47	44,68	9,65
150	18,3	0,92	7,07	9,59	250	18,6	0,47	45,65	9,86
200	21,1	1,06	7,09	9,58	400	23,3	0,58	46,54	9,69
200	21,1	1,06	7,09	9,58	400	23,3	0,58	46,54	9,69
$m$ [g]	$40T_5$ [s]	$T_5$ [s]	$k'_5$ [Nm <sup>-1</sup> ]	$g$ [ms <sup>-2</sup> ]					
80	16,3	0,41	19,02	9,63					
80	16,3	0,41	19,02	9,63					
100	18,3	0,46	18,86	9,47					
100	18,3	0,46	18,86	9,47					
120	20,0	0,50	18,95	9,63					
120	20,1	0,50	18,76	9,54					
150	22,3	0,56	19,05	9,67					
150	22,3	0,56	19,05	9,67					
200	25,7	0,64	19,13	9,73					
200	25,8	0,65	18,98	9,65					

$$k'_2 = (6,2 \pm 0,2)\text{Nm}^{-1}$$

$$k'_3 = (7,0 \pm 0,2)\text{Nm}^{-1}$$

$$k'_4 = (45,0 \pm 0,9)\text{Nm}^{-1}$$

$$k'_5 = (19,0 \pm 0,1)\text{Nm}^{-1}$$

Tíhové zrychlení  $g$  jsem určil jako aritmetický průměr z vypočtených tíhových zrychlení pro jednotlivé pružiny a závaží.

$$g = (9,7 \pm 0,3)\text{ms}^{-2} \quad (10)$$

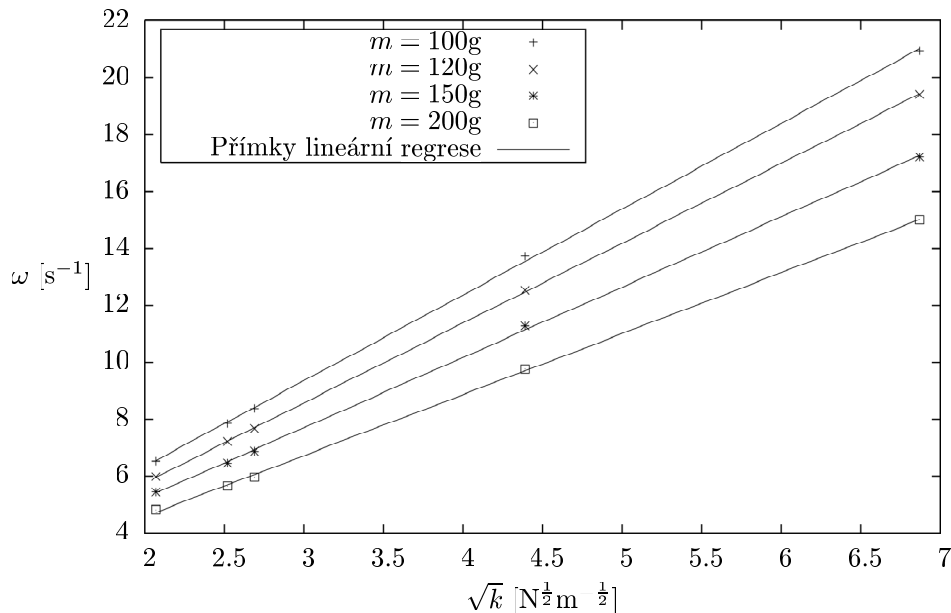
### 3.4 Grafy závislostí

V tabulce 3 jsou uvedeny hodnoty  $\omega$  spočtené podle vzorce (5) v závislosti na  $\sqrt{k}$  při daném zatížení  $m$ . Závislost  $\omega = f(\sqrt{k})$  je znázorněna na grafu 2.

Tabulka 3: Závislost  $\omega$  na  $\sqrt{k}$

	$m = 100 \text{ g}$	$m = 120 \text{ g}$	$m = 150 \text{ g}$	$m = 200 \text{ g}$
$\sqrt{k} [\text{N}^{\frac{1}{2}}\text{m}^{-\frac{1}{2}}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$
2,07	6,53	5,98	5,43	4,82
2,52	7,85	7,20	6,46	5,64
2,69	8,38	7,66	6,87	5,96
6,87	20,94	19,41	17,21	15,00
4,39	13,73	12,54	11,27	9,76

Graf 2: Závislost úhlové rychlosti  $\omega$  na  $\sqrt{k}$

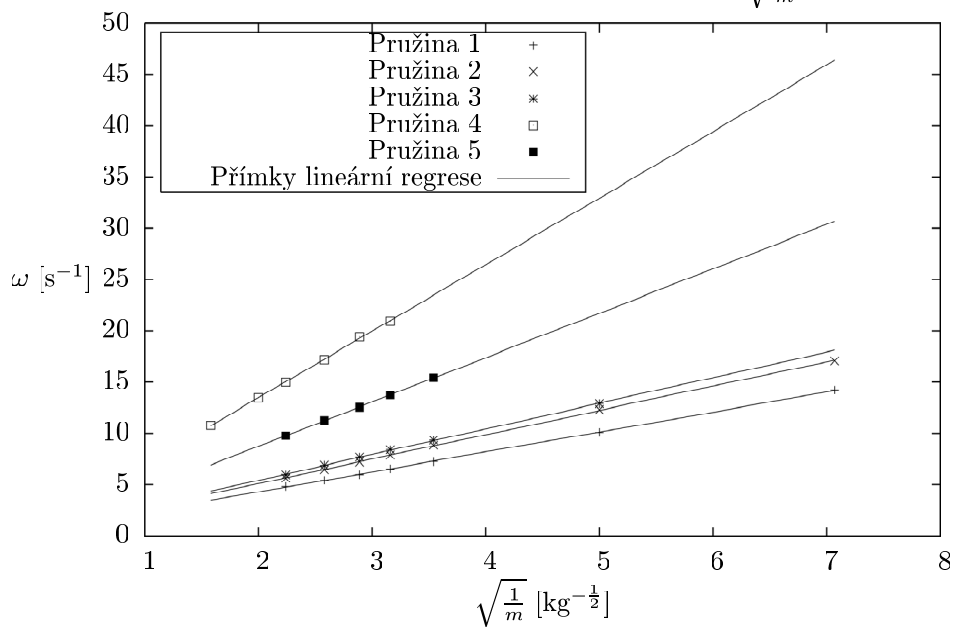


V tabulce 4 jsou uvedeny hodnoty  $\omega$  spočtené podle vzorce (5) v závislosti na  $\sqrt{\frac{1}{m}}$  při použití jedné pružiny. Závislost  $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$  je znázorněna na grafu 3.

Tabulka 4: Závislost  $\omega$  na  $\sqrt{\frac{1}{m}}$

	Pružina 1	Pružina 2	Pružina 3	Pružina 4	Pružina 5
$\sqrt{\frac{1}{m}} [\text{kg}^{-\frac{1}{2}}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$	$\omega [\text{s}^{-1}]$
7,07	14,20	17,10			
5,00	10,09	12,32	12,89		
3,54	7,24	8,82	9,34		15,42
3,16	6,53	7,85	8,38	20,94	13,73
2,89	5,98	7,20	7,66	19,41	12,54
2,58	5,43	6,46	6,87	17,21	11,27
2,24	4,82	5,64	5,96	15,00	9,76
2,00				13,44	
1,58				10,79	

Graf 3: Závislost úhlové rychlosti  $\omega$  na  $\sqrt{\frac{1}{m}}$



## 4 Diskuse výsledků

Tuhosti pružin 1, 2 a 5 určené dvěma metodami se shodují v rámci chyb měření, tuhosti pružin 3 a 4 určené statickou metodou se odlišují od tuhostí určených dynamickou metodou více než v rámci chyby měření. U pružin s menší tuhostí byla přesnější metoda statická.

Určení místního tíhového zrychlení  $g$  se v rámci chyby shoduje s tabelovanou hodnotou  $g = 9,810 \text{ ms}^{-2}$  v [2].

Z grafu 1 je patrné, že jsem pružiny zatěžoval tak, že výchylka byla přímo úměrná působící síle. Průběh závislosti z grafů 2 a 3 odpovídá očekávání, že závislosti jsou lineární.

Přesnost měření by se dala zlepšit, pokud bychom periodu kmitů měřili např. pomocí stopek spínaných přerušením světelného paprsku. Tím bychom eliminovali chybu člověka a zvětšila by se tak přesnost určení tuhosti pružiny dynamickou metodou. Pro zlepšení přesnosti by také bylo vhodné při použití menších závaží uvažovat hmotnost samotné pružiny.

## 5 Závěr

Statickou metodou jsem změřil tuhost pěti pružin

$$k_1 = (4,27 \pm 0,04)\text{Nm}^{-1}$$

$$k_2 = (6,35 \pm 0,02)\text{Nm}^{-1}$$

$$k_3 = (7,25 \pm 0,04)\text{Nm}^{-1}$$

$$k_4 = (47,2 \pm 0,9)\text{Nm}^{-1}$$

$$k_5 = (19,3 \pm 0,3)\text{Nm}^{-1}$$

Tuhost pěti pružin jsem změřil také metodou dynamickou

$$k'_1 = (4,3 \pm 0,2)\text{Nm}^{-1}$$

$$k'_2 = (6,2 \pm 0,2)\text{Nm}^{-1}$$

$$k'_3 = (7,0 \pm 0,2)\text{Nm}^{-1}$$

$$k'_4 = (45,0 \pm 0,9)\text{Nm}^{-1}$$

$$k'_5 = (19,0 \pm 0,1)\text{Nm}^{-1}$$

Určil jsem místní tíhové zrychlení

$$g = (9,7 \pm 0,3)\text{ms}^{-2} \tag{11}$$

Závislost prodloužení pružiny na působící síle  $y = i(F)$  je znázorněna na grafu 1. Závislosti

$$\omega = f(\sqrt{k}),$$
$$\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$

jsou znázorněny na grafech 2 a 3.

## Reference

- [1] English J.: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006
- [2] Mikulčák J.: Tabulky a vzorce, Prometheus, Praha 2006