

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## PRAKTIKUM II – Elektřina a magnetismus

Úloha č.: VIII

Název: Měření impedancí rezonanční metodou

Pracoval: Pavel Brožek

stud. skup. 12

dne 5.12.2008

Odevzdal dne: .....

Hodnocení: .....

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 10	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
<b>Celkem</b>	max. 20	

Posuzoval: ..... dne .....

# 1 Pracovní úkol

1. Změřte indukčnosti  $L(A)$ ,  $L(B)$  a vlastní kapacity  $C_A$ ,  $C_B$  cívek A a B.
2. Určete vzájemnou indukčnost  $M$  cívek A a B umístěných ve svorkách 1,2 a 3,4 z měření jejich celkové indukčnosti.
3. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
4. Proveďte kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vynesete do grafu.
5. Měření indukčnosti a vzájemné indukčnosti několikrát opakujte a stanovte chybu měření.

# 2 Teorie

Při rezonanci v RLC obvodu platí pro úhlovou frekvenci  $\omega_r$  vztah

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (1)$$

kde  $L$  je indukčnost a  $C$  kapacita v obvodu. Ze známé rezonanční úhlové frekvence  $\omega_r$  a kapacity  $C$  můžeme určit indukčnost v obvodu

$$L = \frac{1}{\omega_r^2 C}. \quad (2)$$

Jestliže dvě cívky o indukčnostech  $L_A$  a  $L_B$  zapojíme do série a jejich vzájemnou indukčnost označíme  $M$ , platí pro celkovou indukčnost

$$L_{1,2} = L_A + L_B \pm 2M, \quad (3)$$

kde znaménko plus platí pro souhlasný a minus pro nesouhlasný směr vinutí v cívkách. Měřením  $L_1$  a  $L_2$  tak můžeme určit  $M$  ze vzorce

$$M = \frac{L_1 - L_2}{4}. \quad (4)$$

Měření provádíme při zapojení podle obrázku 1.

Kapacitu  $C$  cívek měříme tak, že nejprve při kapacitě  $C_1$  kondenzátoru nastavíme frekvenci zdroje, aby nastala rezonance. Poté nastavíme dvojnásobnou frekvenci zdroje a nastavíme kapacitu kondenzátoru na hodnotu  $C_2$  tak, že opět nastane rezonance. Kapacita cívek  $C$  je pak dána vztahem

$$C = \frac{C_1 - 4C_2}{3}. \quad (5)$$

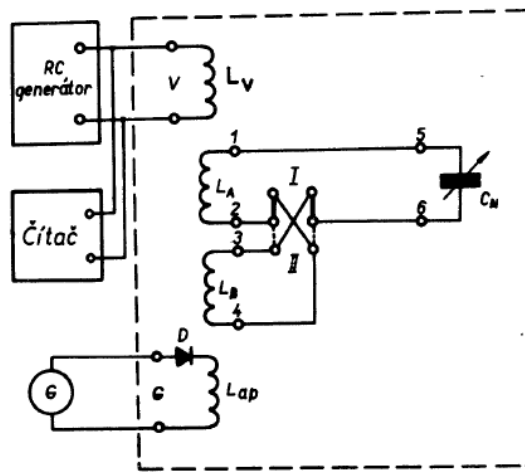
Jestliže zapojíme cívky s kapacitami  $C_A$  a  $C_B$  sériově, jejich výsledná kapacita bude dána vztahem

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}. \quad (6)$$

Rezananční křivku určíme jako závislost poměrné hodnoty proudu  $y = \frac{I}{I_r}$  na rozladění  $x = \frac{\omega}{\omega_r} = \frac{f}{f_r}$ , kde hodnoty s indexem  $r$  jsou hodnoty při rezonanci. Šířku rezonanční křivky charakterizuje míra útlumu  $d$ , kterou určíme jako šířku rezonanční křivky pro  $y^2 = \frac{1}{2}$ . Činitel jakosti  $Q$  a náhradní sériový odpor  $R$  obvodu určíme podle vztahů

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_r L}{R}. \quad (7)$$

Obrázek 1: Schéma zapojení



Teoretická závislost  $I^2$  na  $\omega$  je dána vztahem

$$I^2 = \frac{I_r^2 d^2}{d^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2} . \quad (8)$$

Kalibraci kondenzátoru provádíme tak, že nejprve nastavíme v obvodu s kondenzátorem o známé kapacitě  $C_1$  frekvenci zdroje tak, aby nastala rezonance. Poté na kondenzátor paralelně připojíme měřený kondenzátor o neznámé kapacitě  $C$  a změním kapacitu  $C_1$  známého kondenzátoru na kapacitu  $C_2$  tak, aby opět nastala rezonance. Pro neznámou kapacitu  $C$  pak platí vztah

$$C = C_1 - C_2 . \quad (9)$$

Při počítání přenosu chyb a určování celkové chyby měření budu používat vzorce podle [1]

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (10)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{stat}}^2 + \sigma_{\text{sys}}^2} \quad (11)$$

### 3 Výsledky měření

#### 3.1 Měření indukčnosti rezonanční metodou

Při měření vlastních kapacit cívek jsem nejprve nastavil kapacitu kondenzátoru na hodnotu

$$C_1 = (400 \pm 0,5) \text{ pF} \quad (12)$$

a změnou frekvence zdroje jsem docílil rezonance v obvodu. Poté jsem zvýšil frekvenci zdroje na dvojnásobek a nastavil kapacitu kondenzátoru na hodnotu  $C_2$ , aby opět nastala rezonance. Chybu měření kapacity jsem určil jako nejmenší dílek stupnice 0,5 pF. Hodnoty kapacity pro cívky A a B jsou

$$C_{2A} = (50 \pm 0,5) \text{ pF} \quad (13)$$

$$C_{2B} = (82,5 \pm 0,5) \text{ pF} , \quad (14)$$

vlastní kapacity cívek jsou tedy

$$C_A = (67 \pm 1) \text{ pF} \quad (15)$$

$$C_B = (23 \pm 1) \text{ pF} , \quad (16)$$

Při sériovém zapojení cívek bude jejich celková kapacita podle vzorce (6)

$$C_{AB} = (17,1 \pm 0,6) \text{ pF} \quad (17)$$

Abych zvýšil přesnost měření indukčnosti cívek, určoval jsem rezonanční frekvenci jako průměr dvou frekvencí blízkých rezonanční frekvenci, při kterých byla výchylka galvanometru stejná. Při výpočtu indukčnosti jsem mimo kapacitu kondenzátoru do kapacity v obvodu započtl i vlastní indukčnosti cívek. Ty jsou s kondenzátorem zapojeny paralelně, kapacity se tedy sčítají. Chybu měření frekvence jsem odhadl na 0,2 Hz, nepřesnost byla způsobena převážně nepřesným nastavením frekvence tak, aby výchylka galvanometru byla stejná pro obě dvě frekvence v okolí rezonanční frekvence. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. V tabulce 2 jsou uvedeny indukčnosti, které byly vypočítány jako průměr z více měření, dále jsou uvedeny systematické, statistické a celkové chyby určení indukčností.

Vzájemná indukčnost je podle vzorce (4)

$$M = (57,5 \pm 0,4) \text{ } \mu\text{H} \quad (18)$$

### 3.2 Měření rezonanční křivky

Naměřené hodnoty rezonanční křivky pro zapojení obou cívek v poloze II jsou uvedeny v tabulce 3. Výchylka udává výchylku galvanometru, která je úměrná druhé mocnině proudu v rezonančním obvodu.

Naměřené hodnoty a teoretická závislost daná vzorcem (8) (neznámé konstanty byly určeny pomocí regresní analýzy v programu gnuplot) jsou po přepočtení na redukovanou rezonanční křivku vyneseny v grafu 1. Regresní analýzou byla určena hodnota míry útlumu a rezonanční frekvence, z které určíme úhlovou frekvenci při rezonanci.

$$d = (19,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \quad (19)$$

$$f_r = (395,31 \pm 0,04) \text{ kHz} \quad (20)$$

$$\omega_r = (2483,8 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (21)$$

Pomocí vzorců (7) určíme činitel jakosti  $Q$  a náhradní sériový odpor obvodu  $R$ .

$$Q = (51,0 \pm 0,8) \quad (22)$$

$$R = (16,9 \pm 0,3) \text{ } \Omega \quad (23)$$

### 3.3 Kalibrace otočného kondenzátoru

Po připojení spojovacích vodičů, které mají také svou kapacitu, ale před připojením otočného kondenzátoru nastala rezonance při kapacitě známého kondenzátoru

$$C_1 = (1090 \pm 0,5) \text{ pF} \quad (24)$$

Po připojení otočného kondenzátoru jsem měřil kapacitu známého kondenzátoru  $C_2$ , při které při stejné frekvenci zdroje nastane rezonance. Pomocí vzorce (9) můžeme určit kapacitu otočného kondenzátoru. Naměřené kapacity jsou v závislosti na poloze (označím  $p$ ) ukazatele na otočném kondenzátoru uvedeny v tabulce 4 a v grafu 2.

Tabulka 1: Měření indukčnosti rezonanční metodou

Cívka	$C$ [pF]	$f_1$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_r$ [Hz]	$L$ [ $\mu$ H]
A	450	489,6	482,7	486,2	207,3
	450	488,7	479,7	484,2	209,0
	450	486,5	482,1	484,3	208,9
	600	427,8	423,0	425,4	209,9
	600	429,5	421,0	425,3	210,0
	600	428,6	422,1	425,4	209,9
	800	374,3	370,9	372,6	210,4
	800	375,2	369,9	372,6	210,5
	800	376,2	368,9	372,6	210,5
B	450	474,8	471,5	473,2	239,2
	450	475,4	470,9	473,2	239,2
	450	475,9	470,4	473,2	239,2
	600	413,5	410,8	412,2	239,4
	600	414,0	410,3	412,2	239,4
	600	414,7	409,6	412,2	239,4
	800	359,7	357,6	358,7	239,3
	800	360,3	357,1	358,7	239,2
	800	360,8	356,5	358,7	239,3
AB, poloha I	450	307,9	305,1	306,5	577,3
	450	308,2	304,8	306,5	577,3
	450	308,6	304,4	306,5	577,3
	600	267,9	265,9	266,9	576,2
	600	268,3	265,6	267,0	576,0
	600	268,6	265,2	266,9	576,2
	800	233,2	231,2	232,2	575,0
	800	233,5	230,9	232,2	575,0
	800	233,8	230,6	232,2	575,0
AB, poloha II	450	397,7	392,9	395,3	347,0
	450	398,7	392,0	395,4	347,0
	450	399,4	391,5	395,5	346,8
	600	345,9	342,6	344,3	346,4
	600	346,5	342,0	344,3	346,4
	600	347,0	341,7	344,4	346,2
	800	301,0	297,9	299,5	345,7
	800	301,4	297,5	299,5	345,7
	800	302,0	297,0	299,5	345,6

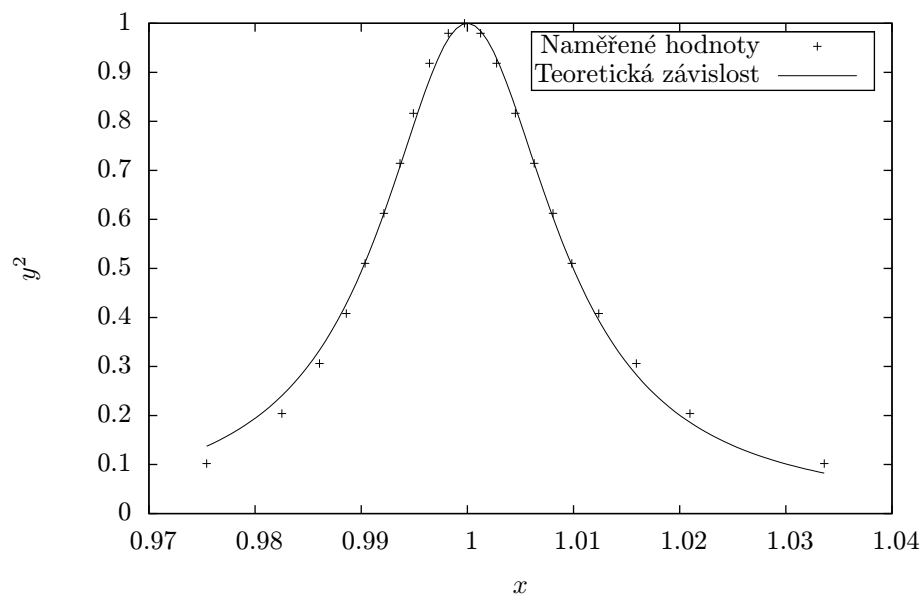
Tabulka 2: Naměřené indukčnosti

	$L$ [ $\mu$ H]	$\sigma_{\text{sys}}$ [ $\mu$ H]	$\sigma_{\text{stat}}$ [ $\mu$ H]	$\sigma$ [ $\mu$ H]
$L_A$	209,6	0,5	1,0	1,1
$L_B$	239,3	0,6	0,06	0,6
$L_1$	576,1	1,1	0,9	1,4
$L_2$	346,3	0,6	0,5	0,8

Tabulka 3: Měření rezonanční křivky

výchylka	$f$ [Hz]	$f$ [Hz]
5	408,6	385,6
10	403,6	388,4
15	401,6	389,8
20	400,2	390,8
25	399,2	391,5
30	398,5	392,2
35	397,8	392,8
40	397,1	393,3
45	396,4	393,9
48	395,8	394,6
49	395,2	

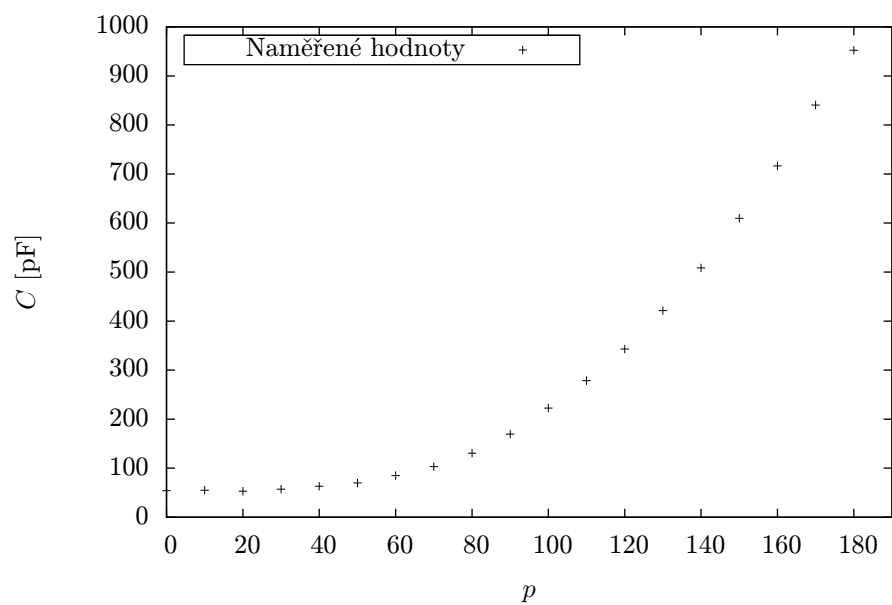
Graf 1: Redukovaná rezonanční křivka



Tabulka 4: Kalibrace otočného kondenzátoru

$p$	$C_2$ [pF]	$C$ [pF]
0	1036,0	54,0
10	1035,0	55,0
20	1037,0	53,0
30	1033,0	57,0
40	1027,0	63,0
50	1020,0	70,0
60	1005,0	85,0
70	987,0	103,0
80	959,5	130,5
90	920,5	169,5
100	867,5	222,5
110	811,5	278,5
120	747,0	343,0
130	668,5	421,5
140	581,5	508,5
150	480,5	609,5
160	373,5	716,5
170	249,5	840,5
180	137,5	952,5

Graf 2: Závislost kapacity otočného kondenzátoru na poloze



## 4 Diskuse výsledků

Ukázalo se, že vlastní kapacita cívek se od kapacity kondenzátoru v obvodu liší pouze o jeden řád, není tedy možné vlastní kapacitu cívek zanedbat, zanedbáním bychom do měření indukčnosti zavedli velkou systematickou chybu. Do výpočtu byla pravděpodobně zanesena chyba v případě měření vzájemné indukčnosti  $M$ , protože ve vzorci (6) neuvažujeme vzájemnou kapacitu. Pro správné měření by bylo potřeba změřit kapacitu cívek při zapojení obou cívek pro obě polohy I a II stejně jako bylo učiněno pro samotné cívky A a B, to jsem však neprovedl.

V grafu 1 je vidět, že naměřená redukováná rezonanční křivka dobře odpovídá teoretické.

Ukázalo se, že závislost kapacity otočného kondenzátoru na poloze ukazatele otočného kondenzátoru není lineární.

## 5 Závěr

Změřil jsem indukčnosti

$$L_A = (209,6 \pm 1,1) \mu\text{H} \quad (25)$$

$$L_B = (239,3 \pm 0,6) \mu\text{H} \quad (26)$$

a vlastní kapacity

$$C_A = (67 \pm 1) \text{pF} \quad (27)$$

$$C_B = (23 \pm 1) \text{pF} \quad (28)$$

cívek A a B a vzájemnou indukčnost

$$M = (57,5 \pm 0,4) \mu\text{H} \quad (29)$$

cívek A a B z měření jejich celkové indukčnosti. Pro zapojení cívek A a B v poloze II jsem proměřil rezonanční křivku (graf 1) a určil jsem míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu

$$d = (19,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \quad (30)$$

$$Q = (51,0 \pm 0,8) \quad (31)$$

$$R = (16,9 \pm 0,3) \Omega . \quad (32)$$

Provedl jsem kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou, výsledek jsem vynesl do grafu 2.

## Reference

- [1] J. English: Úvod do praktické fyziky I, Matfyzpress, Praha 2006
- [2] R. Bakule, J. Šternberk: Fyzikální praktikum II - Elektřina a magnetismus, SPN, Praha