

## 8. MĚŘENÍ IMPEDANCÍ REZONANČNÍ METODOU

### Pracovní úkol

1. Pomocí modelu Q-metru stanovte vzájemnou indukčnost cívek označených A a B.
2. Pro jedno z možných zapojení cívek A, B proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
3. Na Q-metru BM 311 G změřte impedanci rezistoru, cívky a kondenzátoru.

### Rezonanční frekvence RLC obvodu

Velikost impedance sériového nebo admitance paralelního zapojení indukčnosti  $L$ , kapacity  $C$  a odporu  $R$  jsme uvedli v návodu pro úlohu č.6 (viz vztahy (11) a (20)). Pro sériové řazení těchto prvků bude vztah mezi proudem  $I$  a napětím  $U$  udávat výraz

$$U = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I \quad (1)$$

Pro paralelní obvod

$$I = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} U \quad (2)$$

Udržíme-li na sériovém obvodu konstantní napětí  $U$ , poteče obvodem maximální proud  $I_r$  při úhlové frekvenci  $\omega_r$ , pro kterou platí

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3)$$

Obdobně pro paralelní obvod bude platit, že při konstantním proudu protékajícím obvodem bude na prvcích obvodu maximální napětí  $U_r$  opět při úhlové frekvenci  $\omega_r$ , vyhovující vztahu (3). Frekvenci  $f_r = \omega_r / 2\pi$  nazýváme rezonanční frekvencí. V případě sériového obvodu dochází při frekvenci  $f_r$  k proudové rezonanci, v paralelním obvodu k napěťové rezonanci.

### Redukovaná rezonanční křivka

Redukovanou rezonanční křivkou rozumíme závislost poměrné hodnoty proudu  $I / I_r = y$  (pro sériový obvod) nebo napětí na obvodu  $U / U_r = y$  (pro paralelní obvod) na rozladění  $\omega / \omega_r = x$ . Hodnoty  $I_r$  a  $U_r$ , k nimž vztahujeme proud a napětí jsou maximální hodnoty těchto veličin při rezonanci.

Ze vztahu (1) plyne pro sériový obvod

$$\frac{U}{R} = I_r \quad (4)$$

ze vztahu (2) pro paralelní obvod

$$I = \frac{U_r}{R} \quad (5)$$

Podělíme-li vztah (1) výrazem (4), dostaneme po jednoduché úpravě

$$y^2 = \frac{R^2 \frac{C}{L}}{R^2 \frac{C}{L} + \left( \omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right)^2} \quad (6)$$

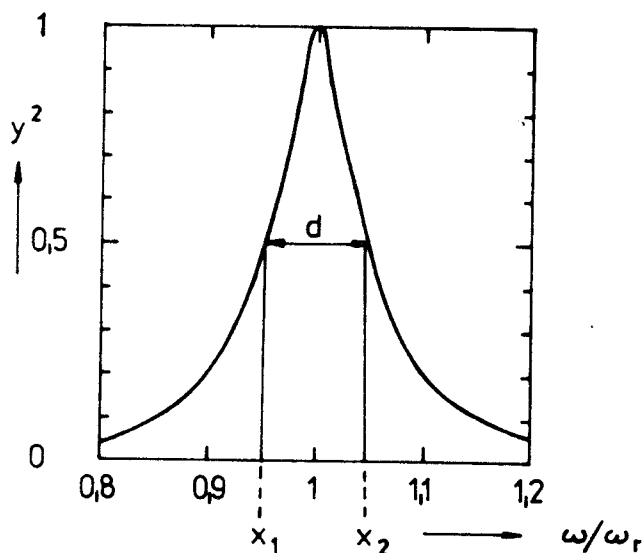
V posledním výrazu označíme

$$d = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (7a)$$

$$a \quad x = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{\omega_r} \quad (7b)$$

Vztah (6) pak můžeme převést na tvar

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + \left( x - \frac{1}{x} \right)^2} \quad (8)$$



Obr. 1

který popisuje redukovanou rezonanční křivku. Obdobně bychom ze vztahu (2) došli k výrazu (8) pro paralelní obvod. Veličina  $d$  je v tomto případě rovna

$$d = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

Pro  $d = 0,1$  je redukovaná rezonanční křivka zakreslena na obr.1 .

## Míra útlumu

Veličina  $d$  vystupující ve vztahu (8) se nazývá míra útlumu a charakterizuje šířku rezonanční křivky. Řešením rovnice (8) (pro  $y^2 = 0,5$ ) se můžeme přesvědčit, že rozdíl poměrných frekvencí  $x_1$ ,  $x_2$ , pro které je  $y^2 = 0,5$  je roven

$$d = |x_1 - x_2|$$

Stanovíme-li rezonanční frekvenci a míru útlumu, je možno ze vztahů (3) a (7a) nebo (9) určit velikost dvou ze tří prvků, jež tvoří rezonanční obvod. Velikost třetího musí být pochopitelně známa.

Změření míry útlumu však v praxi může narážet na určité obtíže. Ve frekvenčním oboru  $10^5$  až  $10^8$  Hz, ve kterém se rezonanční metoda nejčastěji používá, je typická hodnota míry útlumu obvodu sestaveného z cívky a kondenzátoru, řádově  $d \sim 10^{-2}$ . Chceme-li změřit míru útlumu s přesností na procenta, musí být přesnost nastavení a čtení frekvence řádově 0,01 % nebo lepší a stabilita generátoru řádu  $10^{-5}$ . To je na hranici možností běžných generátorů. Kromě toho je tento postup zdlouhavý, neboť vyžaduje tři operace. Nastavit rezonanci a po odečtení hodnot proudu (napětí) a rezonanční frekvence nalézt hodnoty dvou frekvencí, při nichž je proud (napětí) rovno  $1/\sqrt{2}$  - tému dílu hodnoty v rezonanci. Pro stanovení impedance se proto volí výhodnější postup, který popíšeme dále.

## Činitel jakosti a ztrátový činitel obvodu

V návodech k úloze 7 jsme zavedli termíny - činitel jakosti  $Q$  cívky (vztah (3) úlohy 7) a ztrátový činitel  $\operatorname{tg} \delta$  kondenzátoru (vztah (8) úlohy 7). Bezrozměrnými veličinami  $Q$  a  $\operatorname{tg} \delta$  lze popsat vlastnosti RLC obvodu stejně dobře jako mírou útlumu  $d$ . Všechny tyto veličiny charakterizují energetické ztráty v obvodu, nejpoužívanější je přitom termín činitel jakosti.

Ztráty energie v obvodu jsou především určeny vlastnostmi cívky (odporem vinutí, ztráty v jádře, vyzářená energie). Ztráty v kondenzátoru jsou běžně vůči ztrátám v cívce zanedbatelné. O této problematice jsme psali u úlohy 7. Chování reálné cívky lze přibližně vystihnout sériovým zapojením odporu  $R$  a indukčnosti  $L$  (viz obr.1 úlohy 7). Činitel jakosti cívky je pak určen vztahem (3) v úloze 7. Dosadíme-li do výrazu (7a) za kapacitu  $C$  ze vztahu (3), dostaneme

$$d = \frac{R}{\omega_r L} \quad (10)$$

Srovnáme-li tento výraz se vztahem (3) úlohy 7 vidíme, že míra útlumu je rovna převrácené hodnotě činitele jakosti cívky o indukčnosti  $L$ , sériově řazené s odporem  $R$ . Platí tedy

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{d} \quad (11)$$

Odpor  $R$  je v tomto případě sériový náhradní odpor obvodu a činitel jakosti  $Q$  určuje formálně stejný výraz jako tangentu fázového posuvu  $\varphi$ , proudu a napětí sériového řazení odporu  $R$  a indukčnosti  $L$ . V rezonančním obvodu je při rezonanci fázový posuv samozřejmě roven nule  $\varphi = 0$ .

Při paralelním řazení cívky a kondenzátoru nahrazujeme ztráty v cívce a kondenzátoru ztrátami v paralelně řazeném odporu. Míra útlumu je v tomto případě určena vztahem (9). Dosadíme-li do (9) za indukčnost podle (3) dostaneme

$$d = \frac{1}{\omega_r R C} \quad (12)$$

Srovnáme-li tento výraz se vztahem (8) úlohy 7, vidíme, že míra útlumu paralelního RLC obvodu je rovna ztrátovému činiteli paralelního zapojení náhradního odporu  $R$  a v obvodu zapojené kapacity  $C$  při rezonanční frekvenci  $\omega_r$   $d = \operatorname{tg} \delta_{RC}$ . Připomeňme však, při rezonanci ( $\omega = \omega_r$ ) je fázový posuv mezi celkovým proudem a napětím na obvodu roven nule, takže  $\delta = \pi / 2$ .

### činitel přepětí

Nyní přejdeme k popisu metody měření, která se nejběžněji používá v komerčně vyráběných přístrojích nazývaných Q-metry. I když rezonanční měření lze provést s oběma typy obvodů, realizují se převážně se sériovým obvodem. To umožňuje měření zjednodušit, i když za cenu zavedení určité systematické chyby metody.

Při měření se obvykle postupuje tak, že se při konstantní úhlové frekvenci  $\omega$  a konstantním napětí nastavuje obvod do rezonance změnou kapacity kondenzátoru. Na kondenzátoru se měří napětí  $U_C$ , které určuje vztah

$$U_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + (L C \omega^2 - 1)^2}} \quad (13)$$

Tento vztah plyne z (1), uvážíme-li, že  $U_C = I / \omega C$ .

Napětí  $U_C$  bude maximální, je-li splněna podmínka

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \omega_r^2 - \frac{\omega_r^2}{Q^2} \quad (14)$$

Tuto podmínku získáme nalezením extrému funkce (13) za předpokladu, že  $U = \text{konst.}$  Další úpravu provedeme s přihlédnutím ke vztahům (3) a (11).

Bude-li činitel jakosti  $Q$  dostatečně velký, prakticky postačí  $Q > 10$ , je možno položit  $\omega = \omega_r$ , aniž by výsledek měření byl tímto zanedbáním podstatně ovlivněn. Znamená to potom, že obvod nastavený do stavu, ve kterém je napětí  $U_C$  maximální, můžeme považovat za obvod v rezonanci. Frekvence  $\omega$ , při které měříme vyhovuje vztahu (3) a z tohoto vztahu můžeme spočítat například zařazenou indukčnost, známe-li kapacitu.

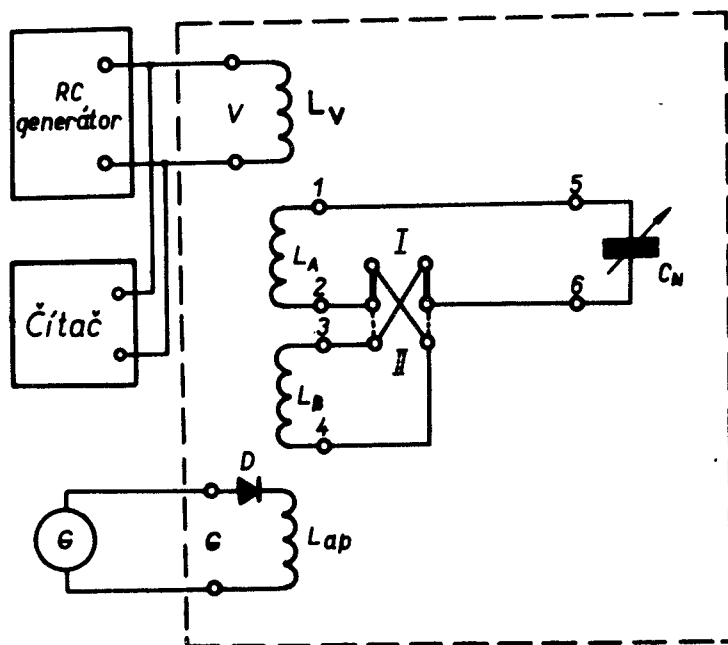
Poměr maximálního napětí  $U_{Cm}$  na kondenzátoru k napětí  $U$  na obvodu se nazývá činitel přepětí  $Q_f$ . Zůstaneme-li u předpokladu, že podmínku (14) pro dosažení maximálního napětí na kondenzátoru lze nahradit jednodušší podmínkou (3), plyne z (13) pro  $\omega = \omega_r$

$$Q_f = \frac{U_{Cm}}{U} = \frac{1}{R C \omega_r} = \frac{\omega_r L}{R} = Q \quad (15)$$

U komerčních přístrojů je zaručena konstantnost napětí  $U$  na obvodu, a stupnici voltmetru, jímž měříme napětí  $U_C$  lze ocejchovat přímo v hodnotách činitele jakosti.

Chybu metody, kterou zavádíme tím, že měříme místo činitele jakosti činitel přepětí, můžeme eliminovat zpracováním výsledků měření podle přesně platících vztahů (13) a (14). Pro běžná měření elektrotechnických součástek to však není nutné a při hodnotách  $Q \sim 100$  a vyšších je to i zbytečné, neboť chyba metody je pak menší než vlastní chyba měřicího přístroje, která u  $Q$ -metrů činí nejméně 1 %.

#### Experimentální uspořádání



Obr. 2

Principiální schéma modelu  $Q$ -metru se kterým měříme první část úlohy, je zakresleno na obr.2. Rezonanční obvod je tvořen v případě zakresleném na obrázku cívkami  $L_A$  a  $L_B$  a kondenzátorem  $C_N$ . Toto zapojení slouží k měření vzájemné indukčnosti. Komutátorem můžeme měnit vzájemnou orientaci vinutí cívky. Kdybychom měřili indukčnost jedné z cívky, jsou svorky určené pro připojení druhé cívky zkratovány. V našem případě je generátor a měřicí

přístroj indikující rezonanci vázán indukčně cívkami  $L_V$  a  $L_{ap}$ . Frekvenci generátoru měříme přesně čítačem. Cívka  $L_V$  je otočná a jejím vychýlením můžeme měnit vazbu mezi generátorem a rezonančním obvodem. Napětí indukované v cívce  $L_{ap}$  je úměrné proudu tekoucímu rezonančním obvodem. Toto napětí můžeme buď měřit přímo (např. milivoltmetrem BM 512), nebo po usměrnění galvanometrem připojeným na svorky G. Druhý případ je zakreslen na obr.2. Je třeba si uvědomit, že charakteristika diody není lineární. Snažíme se vybrat diodu s kvadratickou charakteristikou, pak je výchylka galvanometru přibližně úměrná čtverci proudu rezonančním obvodem. Měříme-li napětí na cívce  $L_{ap}$  milivoltmetrem, není dioda zapojena a údaj voltmetru je úměrný proudu v rezonančním obvodu.

Obvodem, se kterým měříte v praxi, chceme modelovat činnost přístroje pro měření impedancí při vysokých frekvencích, takzvaného Q-metru. Komerční přístroj má stejné základní prvky jako náš model: generátor, rezonanční obvod, vazební obvody a indikátor. Jelikož indukční vazba je frekvenčně závislá, dává se přednost odporové vazbě mezi generátorem a rezonančním obvodem. S aparaturou zakreslenou na obr.2 lze měřit činitel jakosti z šířky rezonanční křivky, takzvanou rozlaďovací metodou. U komerčních přístrojů se převážně používá rychlejší metoda pro měření činitele jakosti pomocí stanovení činitele přepětí.

#### Měření vzájemné indukčnosti

Toto měření lze převést na měření indukčnosti. Zapojíme-li dvě cívky o indukčnostech  $L_A$  a  $L_B$  a vzájemné indukčnosti  $M$  do série, bude jejich celková indukčnost rovna

$$L_{1,2} = L_A + L_B \pm 2M \quad (16)$$

Kladné nebo záporné znaménko platí pro souhlasný resp. nesouhlasný směr vinutí v cívkách. Zapojíme proto cívky tak, aby jejich vinutí mělo jednu souhlasný a podruhé nesouhlasný směr vinutí. Pro oba případy změříme celkovou indukčnost nalezením rezonanční frekvence a výpočtem podle vztahu (3). Získáme hodnoty  $L_1$  a  $L_2$  a z nich vypočteme vzájemnou indukčnost podle vztahu

$$M = \frac{L_1 - L_2}{4} \quad (17)$$

#### Měření rezonanční křivky

Alespoň pro jedno zapojení cívek  $L_A$  a  $L_B$  proměříme celou rezonanční křivku. Po nalezení rezonanční frekvence odečteme maximální výchylku měřícího přístroje a pro předem zvolené výchylky odečítáme postupně na obou stranách od rezonance hodnoty frekvencí, které jim přísluší. Rezonanční křivku vynášíme vždy jako redukovanou. Před výnosem křivky je třeba uvážit, byla-li chyba měřícího přístroje úměrná proudu v rezonančním obvodu, nebo jeho kvadrátu. Ze

zakreslené křivky odečteme její šířku. Při kvadratickém výnosu určujeme šířku v poloviční výšce, při lineárním ve výšce  $1/\sqrt{2}$ . Vydělením nalezené šířky, odečtené v hertzech, rezonanční frekvencí, získáme míru útlumu. Pokud jsme vy-  
náseli na vodorovnou osu relativní rozladění, udává šířka křivky přímo míru  
útlumu. Z nalezené míry útlumu vypočítáme podle vztahu (7a) ekvivalentní sé-  
riový odpor obvodu. Doporučená hodnota kapacity, při níž provádíme předchozí  
měření, je  $C_N = 500 \text{ pF}$ .

### Měření impedance cívky

Následující měření provádíme s Q-metrem BM 311 G. Návod k obsluze to-  
hoto přístroje naleznete v druhé části těchto skript. Po uvedení přístroje do  
provozu připojíme měřenou cívku na svorky  $L_X$  a na vestavěném kondenzátoru  
nastavíme doporučenou hodnotu  $C = 400 \text{ pF}$ . Změnou frekvence nalezneme rezo-  
nanci. Z odečtené frekvence a činitele jakosti (přepětí) vypočítáme podle vzta-  
hů (3) a (15) indukčnost a ekvivalentní sériový odpor

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} \quad (18)$$

$$R_s = \frac{\omega L}{Q} \quad (19)$$

Náhradní paralelní odpor bychom vypočítali z výrazu

$$R_p = Q \omega L \quad (20)$$

Oba náhradní odpory  $R_s$  a  $R_p$  jsou kmitočtově závislé. Náhradní odpor  
charakterizuje nejen ohmické ztráty, ale i ztráty způsobené vyzařováním cívky,  
případně způsobené absorpcí energie v jádře.

Výsledek měření indukčnosti může ovlivnit vlastní kapacita cívky  $C_0$ .  
Pokud není zanedbatelná, musíme ji přičíst ke kapacitě nastavené na kondenzá-  
toru Q-metru a zahrnout ji tak do kapacity vystupující ve vzorci (18).

Velikost vlastní kapacity cívky můžeme zjistit následujícím postupem.  
Po připojení cívky na svorky  $L_X$  nastavíme na kondenzátoru Q-metru kapacitu  
 $C_1 = 400 \text{ pF}$  a změnou kmitočtu vyhledáme rezonanční frekvenci  $f_1$ . Po odečte-  
ní hodnoty  $f_1$  zvýšíme frekvenci na dvojnásobek  $f_2 = 2f_1$ . Rezonanci nyní  
nastavíme změnou kapacity na hodnotu  $C_2$ , kterou odečteme. Vlastní kapacitu  
 $C_0$  vypočítáme ze vztahu

$$C_0 = \frac{C_1 - 4C_2}{3} \quad (21)$$

Pro jednovrstvou cívku, kterou měříme v praxi, je vlastní kapacita nepatrná.

### Měření impedance kondenzátoru

Připojíme-li měřený kondenzátor paralelně ke kondenzátoru Q-metru, tj. na svorky  $C_x$ , můžeme diferenční metodou měřit kapacity od 1 pF do maximálního rozsahu vestavěného kondenzátoru cca 500 pF. Do svorek  $L_x$  připojíme pomocnou cívku ze sady BP 3111, vybranou s přihlédnutím ke frekvenci, při které chceme měřit.

Nejprve nastavíme rezonanci s připojeným kondenzátorem a odečteme hodnoty  $C_2$  a  $Q_2$ . Po odpojení měřeného kondenzátoru uvedeme obvod do rezonance při nezměněné frekvenci zvýšením kapacity vestavěného kondenzátoru. Odečteme kapacitu  $C_1$  a činitel jakosti  $Q_1$ . Z naměřených hodnot vypočteme kapacitu  $C$  a náhradní paralelní odpor  $R_p$  podle vztahů

$$C = C_1 - C_2 \quad , \quad (22)$$

$$R_p = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 - Q_2} \cdot \frac{1}{\omega C_1} \quad . \quad (23)$$

### Měření impedance rezistoru

Měřený prvek je možno připojit buď paralelně nebo sériově k cívce vybrané ze sady BP 3111 podle zvolené frekvence měření. Paralelní připojení je vhodné pro měření větších odporů, řádově hodnot  $10^4$  až  $10^8 \Omega$ , měříme-li při frekvenci 1 MHz. Při sériovém zapojení takto velkých odporů by byl činitel jakosti obvodu neměřitelně malý a rezonanci bychom nenalezli.

Při paralelním zapojení se odpor připojí ke svorkám  $C_x$ , nalezneme rezonance a odečteme hodnoty  $C_2$  a  $Q_2$ . Po odpojení rezistoru se při nezměněné frekvenci doladíme otočným kondenzátorem Q-metru rezonance a odečteme hodnoty  $C_1$  a  $Q_1$ . Odpor se vypočte ze vztahu

$$R = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 - Q_2} \cdot \frac{1}{\omega C_1} \quad . \quad (24)$$

Rezistor může mít kromě odporové složky též složku kapacitní nebo indukční. To záleží na znaménku změny kapacity. Je-li  $C_1 > C_2$ , převažuje kapacitní složka a parazitní kapacita rezistoru je rovna

$$C = C_1 - C_2 \quad . \quad (25)$$

Naměříme-li  $C_1 < C_2$ , převažuje indukční složka a náhradní paralelní induktance je rovna

$$L = \frac{1}{\omega^2 (C_2 - C_1)} \quad (26)$$



Pro malé odpory je větší činitel jakosti obvodu při sériovém zapojení rezistoru do obvodu. Je však nutno použít sériový držák, který je ve výbavě Q-metru. Nasuneme jej na zdíčky Q-metru a do jeho svorek L připojíme zvolenou cívku, do svorek  $Z_x$  měřený rezistor. Nejprve se provede měření v zatlumeném stavu, tj. při uvolněném zkratovacím šroubu sériového držáku. Odečtou se hodnoty  $C_2$  a  $Q_2$ . Poté se zkratovacím šroubem vyřadí svorky  $Z_x$ , obvod se změnou kapacity vestavěného otočného kondenzátoru uvede opět do rezonance a odečtou se hodnoty  $C_1$  a  $Q_1$ . Pro výpočet odporu slouží vztah

$$R = \frac{\frac{C_1}{C_2} Q_1 - Q_2}{Q_1 Q_2} \cdot \frac{1}{\omega C_1} \quad (27)$$

### Literatura

- [1] Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983  
odst. 4.4.4, čl. 4.4.6.4, 4.4.7.4, 4.4.8.2
- [2] Sedlák B., Bakule R.: Elektřina a magnetismus, SPN, Praha 1980  
kap. 9

## 9. CHARAKTERISTIKY TERMISTORU

### Pracovní úkol

#### Část A

1. Změřte teplotní závislost odporu termistoru v co největší části teplotního intervalu od 180 do 380 K.
2. Změřte statickou charakteristiku termistoru pro proudy do 25 mA.

#### Část B

3. Získané výsledky měření zpracujte pomocí programu, který máte u úlohy k dispozici.
4. Seznamte se s tímto programem. V referátu stručně popište, jaký matematický postup použil programátor ke stanovení tepelného odporu termistoru  $K$  a teploty okolí  $T_0$ .
5. Na grafu 3, kresleném zapisovačem je zakreslena statická charakteristika (obr.1 ve skriptech). Podle jakého explicitního vztahu je počítána a které parametry termistoru jsou pro výpočet křivky využívány?