

## 6. MĚŘENÍ ÚČINÍKU

### Pracovní úkol

1. Změřte účinník : a) rezistoru  
b) kondenzátoru ( $C \sim 10 \mu\text{F}$ )  
c) cívky

Určete chybu měření. Diskutujte souhlas výsledků s teoretickými hodnotami pro ideální prvky. Pro cívku vypočítejte indukčnost a odpor v sériovém a paralelním náhradním zapojení.

2. Změřte účinník sériového a paralelního zapojení rezistoru a kondenzátoru (pro  $C = 1; 2; 5; 10 \mu\text{F}$ ). Z naměřených hodnot vypočítejte odpor rezistoru. Určete chyby měření a rozhodněte, které z obou zapojení je v daném případě vhodnější pro stanovení odporu.
3. Změřte závislost proudu a výkonu na velikosti kapacity zařazené do sériového RLC obvodu.
4. Výsledky úkolu 3 zpracujte graficky, v závislosti na zařazené kapacitě vynesete účinník, fázový posuv napětí vůči proudu a výkon.

### Výkon střídavého proudu

Tato úloha je zaměřena na problematiku měření výkonu v obvodu, kterým protéká střídavý proud. Střední hodnota výkonu v tomto případě závisí nejen na efektivních hodnotách proudu a napětí, ale též na vzájemném fázovém posuvu  $\varphi$  těchto veličin.

Střední hodnota výkonu (dále jen výkon) je definována vztahem

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt \quad , \quad (1)$$

ve kterém  $u(t)$  a  $i(t)$  jsou okamžité hodnoty napětí a proudu v čase  $t$ , veličina  $T$  znamená dobu kmitu. V případě harmonické závislosti proudu a napětí bude pro výkon platit

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \cdot I_0 \sin \left( \frac{2\pi}{T} t - \varphi \right) dt = \\ &= - \frac{1}{T} U_0 I_0 \sin \varphi \int_0^T \left( \sin \frac{2\pi}{T} t \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t \right) dt + \\ &+ \frac{1}{T} U_0 I_0 \cos \varphi \int_0^T \left( \sin^2 \frac{2\pi}{T} t \right) dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi \end{aligned}$$

Integrál ze součinu sinu a kosinu je roven nule, integrál z druhé mocniny sinu je roven  $T/2$ .

Do posledního výrazu je vhodnější dosadit místo špičkových hodnot  $U_0$ ,  $I_0$  efektivní hodnoty  $U$ ,  $I$  napětí a proudu (viz úloha 5, vztah (3)). Pak bude

$$P = U I \cos \varphi \quad (2)$$

Kosinus fázového posuvu  $\varphi$  proudu vůči napětí ( $\cos \varphi$ ) se nazývá účinník. Fázový posuv  $\varphi$  může nabývat hodnot z intervalu  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , takže účinník se může měnit od nuly (pro  $\varphi = \pm \pi/2$ ), do jedné (pro  $\varphi = 0$ ).

### Zobecněný Ohmův zákon

V předchozím textu jsme se seznámili s tím, že výkon spotřebovaný v obvodu protékaném střídavým proudem závisí nejen na amplitudách (efektivních hodnotách) proudu a napětí, ale i na jejich vzájemném fázovém posuvu. Vztah mezi napětím a proudem i s hlediska fázového posuvu nelze popsat pomocí Ohmova zákona, používaného ve formě  $U = R I$  pro obvody stejnosměrné. Pro obvody střídavého proudu (harmonického průběhu) používáme proto komplexní symboliku. V jednom komplexním čísle lze zachytit dva údaje. Problematice použití komplexní symboliky pro popis lineárních obvodů je věnována 9. kapitola skript [2].

Komplexní symboliku lze zavést tak, že ve vyjádření časové závislosti proudu a napětí nahradíme goniometrickou funkci komplexní exponenciálou

$$u^*(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = U_0 \{ \cos(\omega t + \varphi_1) + j \sin(\omega t + \varphi_1) \} \quad (3)$$

$$i^*(t) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = I_0 \{ \cos(\omega t + \varphi_2) + j \sin(\omega t + \varphi_2) \} \quad (4)$$

V předchozích výrazech znamená  $U_0$ ,  $I_0$  špičkové hodnoty napětí a proudu,  $j$  imaginární jednotku,  $\omega$  úhlovou frekvenci,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  fázi napětí a proudu a  $t$  čas. Okamžité hodnoty proudu a napětí jsou pochopitelně reálné a určuje je reálná část výrazů (3) a (4).

Poměr okamžitých hodnot  $u^*$  a  $i^*$  je časově nezávislý a určuje komplexní impedanci  $Z^*$  obvodu ustáleného střídavého proudu se sinusovým průběhem. Je zavedena pro usnadnění výpočtů v těchto obvodech, a je jí možno též stanovit jako poměr komplexního napětí  $U^*$  a komplexního proudu  $I^*$ .

$$Z^* = \frac{U^*}{I^*}, \quad \text{resp.} \quad U^* = Z^* I^* \quad (5)$$

Předchozí vztahy představují dvě ekvivalentní vyjádření zobecněného Ohmova zákona.

Komplexní proud a napětí je dán jako časově nezávislý součinitel ve výrazech (3) a (4), tj. platí

$$U^* = U_0 e^{j\varphi_1}, \text{ resp. } I^* = I_0 e^{j\varphi_2} \quad (6)$$

Protože  $|e^{j\varphi}| = 1$  plyne ze vztahu (5) pro velikost (absolutní hodnotu) komplexní impedance

$$Z = |Z^*| = \frac{U_0}{I_0}$$

### Impedance odporu, kapacity a indukčnosti

Proud a napětí na odporu jsou vzájemně svázány vztahem

$$U^* = R I^*$$

Porovnáním s (5) dostaneme, že platí

$$Z_R^* = R \quad (7)$$

Impedance odporu je reálná a fázový posuv mezi proudem a napětím nulový.

Náboj na kapacitě  $C$  je roven součinu této kapacity a napětí. Vzhledem k tomu, že proud udává derivace náboje podle času bude platit

$$i^* = I^* e^{j\omega t} = C \frac{du^*}{dt} = j\omega C U^* e^{j\omega t}$$

Srovnáme-li druhý a čtvrtý výraz v předchozím vztahu (po vykrácení členu  $\exp(j\omega t)$ ) se vztahem (5) bude platit

$$Z_C^* = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \quad (8)$$

Impedance kapacity je ryze imaginární a fázový posuv napětí vůči proudu bude  $-\pi/2$ .

Pro indukčnost platí

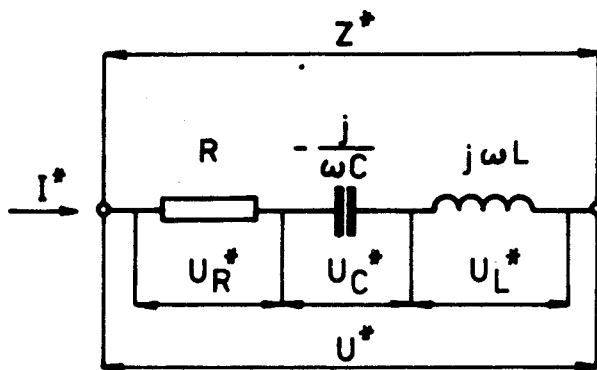
$$u^* = L \frac{di^*}{dt}, \text{ resp. } U^* = j\omega L I^*$$

z čehož pro srovnání s (5) plyne

$$Z_L^* = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2} \quad (9)$$

Impedance indukčnosti je opět ryze imaginární a fázový posuv napětí vůči proudu je  $\pi/2$ .

## Sériové řazení impedancí



Při sériovém řazení viz obr.1 teče všemi prvky elektrického obvodu stejný proud, a napětí na celém obvodu je rovno součtu napětí na jednotlivých prvcích. Pro sériový obvod sestavený z odporu  $R$ , kapacity  $C$  a indukčnosti  $L$  bude proto platit

Obr. 1

$$U^* = R I^* - \frac{j}{\omega C} I^* + j \omega L I^* = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I^* .$$

Podle (5) bude impedance obvodu komplexní a rovná

$$Z^* = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j X \quad . \quad (10)$$

Velikost impedance bude určovat výraz

$$Z = |Z^*| = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad , \quad (11)$$

a fázový posuv napětí vůči proudu bude roven

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad . \quad (12)$$

Z předchozích výrazů můžeme určit velikost impedance a fázový posuv pro zapojení pouze dvou prvků. Třetí prvek nahradíme zkratem ( $R = 0$  či  $L = 0$  nebo  $1/\omega C = 0$ ) .

Bude platit :

pro obvod RL

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad , \quad (13)$$

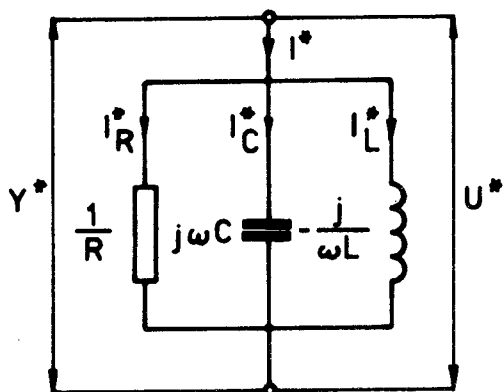
$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \quad , \quad (14)$$

pro obvod RC

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (15)$$

$$\varphi = \arctg \left( -\frac{1}{\omega R C} \right) \quad (16)$$

### Paralelní řazení impedancí



Při tomto řazení prvků elektrického obvodu, viz obr.2 je na všech prvcích stejné napětí a celkový proud je roven součtu proudů tekoucích jednotlivými prvky. Pro paralelní řazení odporu, kapacity a indukčnosti bude platit (viz vztahy (7),(8),(9)).

Obr. 2

$$I^* = \frac{1}{Z_R} U^* + \frac{1}{Z_C} U^* + \frac{1}{Z_L} U^* = \left( \frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega L} \right) U^*$$

Zavedeme-li pojem admittance, což je převrácená hodnota impedance

$$Y^* = Y e^{j\varphi'} = \frac{1}{Z^*} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} \quad (17)$$

můžeme zapsat vztah mezi napětím a proudem ve tvaru

$$I^* = Y^* U^* = (G + jB) U^* \quad (18)$$

Zde je G reálná složka admittance (vodivost,  $G = 1/R$ ) a B je imaginární složka admittance (susceptance). Pro B platí

$$B = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad (19)$$

Velikost admitance je rovna

$$|Y| = Y^* = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}, \quad (20)$$

a pro fázový posuv  $\varphi'$  proudu vůči napětí platí

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{B}{G} = \operatorname{arctg} \left( \omega RC - \frac{R}{\omega L} \right). \quad (21)$$

Z předchozích výrazů můžeme určit velikost admitance a fázový posuv pro paralelní zapojení dvou prvků. Třetí prvek nahradíme nulovou admitancí ( $1/R = 0$ ,  $\omega C = 0$ ,  $1/\omega L = 0$ ). Ze vztahů (20) a (21) plyne

pro obvod RL

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \quad (22)$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \left( -\frac{R}{\omega L} \right), \quad (23)$$

pro obvod RC

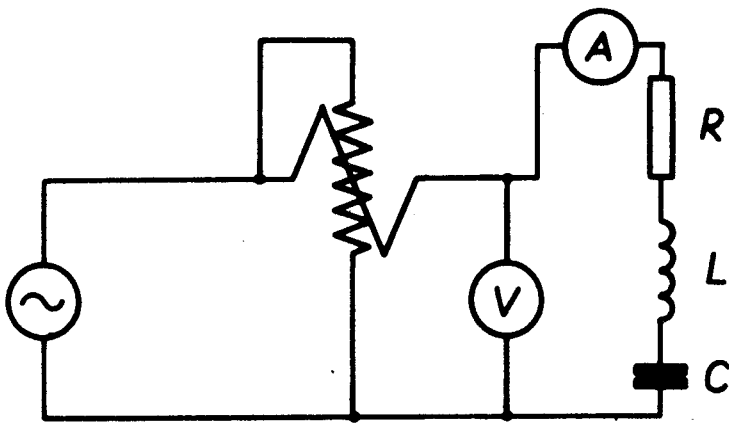
$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \quad (24)$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \omega R C. \quad (25)$$

Fázový posuv  $\varphi'$  proudu vůči napětí je roven záporně vzaté hodnotě fázového posuvu  $\varphi$  napětí vůči proudu ( $\varphi = -\varphi'$ ), viz vztah (17).

### Měření účinníku.

K měření účinníku se vyrábějí pro technickou frekvenci 50 Hz přístroje, na jejichž stupnici lze přímo odečítat účinník soustavy připojené ke zdroji. V praxi, abychom se seznámili též s měřením výkonu, používáme k měření účinníku wattmetru. Účinník můžeme vyhodnotit z rovnice (2), změříme-li kromě výkonu  $P$  též efektivní proud a napětí na zátěži. K měření je možno použít obvod zakreslený na obr.3.



Obr. 3

kal proud tekoucí napěťovou cívkou. Wattmetr bude správně zapojen, bude-li vstupní proudová a napěťová svorka, které jsou označeny šipkami, propojeny do jednoho uzlu. Proudová svorka označená šipkou musí být zapojena u zdroje, druhá označená A u zátěže. Při jiném zapojení bude mít výchylka přístroje nesprávný směr.

Jako zátěž je na obr.3 zakreslen sériový rezonanční obvod. Při měření jiného obvodu musí být propojení prvků příslušným způsobem změněno. Zapojení na obr.3 odpovídá obvodu pro měření pracovního úkolu č.3.

Obvod je napájen z transformátoru 220/60 V. Doporučený rozsah wattmetru je 75 V, 0,5 A, celý rozsah stupnice pak odpovídá výkonu 37,5 W.

Výsledek měření je ovlivněn celou řadou chyb. Především jsou to náhodné chyby dané třídou přesnosti měřícího přístroje. Ty jsou poměrně velké, měříme-li na začátku stupnice. Uplatnit se může i kolísání frekvence sítě ( $f = 50 \pm 0,5$  Hz). Systematická chyba je dána především vnitřním odporem ampérmetru a voltmetru (viz úloha 2), měříme-li v zapojení podle obr.1.

### Vyhodnocení velikosti impedancí

Známe-li efektivní hodnoty proudu  $I$  a napětí  $U$ , můžeme z nich vyhodnotit velikost impedance  $Z$ , nebo admitance  $Y$ , zapojené v obvodu. Ze vztahů (5) resp. (18) (viz text za rovnicí (5)).

$$U = Z I \quad \text{resp} \quad I = Y U \quad (22)$$

V rámci této úlohy měříme účinník, který je funkcí fázového posuvu  $\varphi$ . Protože kosinus je sudá funkce, můžeme ze známé hodnoty účinníku určit pouze absolutní hodnotu fázového posuvu. Z rovnic (22) můžeme vypočítat velikost impedance nebo admitance a z fázového posuvu, až na znaménko, poměr reálné a imaginární části impedance či admitance. Je-li komplexní impedance určena impedancemi dvou ideálních prvků elektrického obvodu (odporem a kapacitou nebo odporem

Cívky wattmetru jsou znázorněny vlnovkami z lomených čar. Proudová cívka se zapojuje do serie se zátěží, napěťová, která má větší počet závitů, paralelně.

Zpravidla se používají elektrodynamické wattmetry, které mají poměrně malý odpor napěťové cívky. Zapojujeme proto napěťovou cívku co nejbližší ke zdroji, aby proudovou cívku nebo ampérmetrem neproté-

a indukčností), můžeme z fázového posuvu a poměru napětí a proudu určit velikost obou prvků.

Pro sériové spojení indukčnosti  $L_S$  a odporu  $R_S$  plyne z rovnic (13), (14)

$$R_S = \frac{U}{I} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (23)$$

$$L_S = \frac{1}{\omega} \frac{U}{I} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (24)$$

Pro paralelní spojení indukčnosti  $L_P$  a odporu  $R_P$  plyne z rovnic (22), (23)

$$R_P = \frac{U}{I} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (25)$$

$$L_P = \frac{1}{\omega} \frac{U}{I} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (26)$$

U cívek je obtížné dosáhnout toho, aby jejich odpor byl zanedbatelný a fázový posuv napětí vůči proudu se zdatelně nelišil od  $\pi/2$ . Metoda, kterou měříme u této úlohy fázový posuv sice není příliš přesná, přesto má smysl určit hodnotu sériového nebo paralelního odporu v náhradních schématech cívky.

U kondenzátorů je situace poněkud jiná. Pokud se nejedná o elektrolytický kondenzátor, liší se vlastnosti reálného kondenzátoru jen málo od vlastností ideální kapacity. Odchylky by bylo možno zjistit pouze při použití přesnější metody měření, např. můstkové.

V pracovním úkolu 2 však máte měřit účinník sériového a paralelního spojení rezistoru a kondenzátoru. Známe-li kapacitu zapojeného kondenzátoru, můžeme pro paralelní spojení spočítat odpor sériově zapojeného rezistoru z rovnic (15) nebo (16), pro paralelní zapojení z rovnic (24) nebo (25). Úprava vztahů je jednoduchá, proto zde neuvádíme výsledné vzorce. Znaménko fázového posuvu  $\varphi$  musí být takové, aby vypočítané  $R > 0$ . Impedance  $Z$  je rovna poměru efektivního napětí  $U$  a proudu  $I$  ( $Z = U/I$ ), admitance  $Y = I/U$ . Tímto způsobem výpočtu odporu získáme správnou hodnotu, pokud kondenzátor nemá vlastní vodivost, tj. chová se jako ideální kapacita. Nakolik je tento předpoklad splněn můžeme odhadnout z měření účinníku samotného kondenzátoru (viz prac. úkol 1).



Pokud kondenzátor má nezanedbatelnou vodivost ( $\cos \varphi \neq 0$ ), museli bychom vyhodnotit jeho odpor a kapacitu pro sériové ( $R_s, C_s$ ) či paralelní ( $R_p, C_p$ ) náhradní zapojení. Z rovnic (15) a (16) plyne pro sériové zapojení

$$C_s = \frac{1}{\omega} \frac{I}{U} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (27)$$

$$R_s = \frac{U}{I} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (28)$$

Pro paralelní zapojení kapacity a odporu plyne z rovnic (24) a (25)

$$C_p = \frac{1}{\omega} \frac{I}{U} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (29)$$

$$R_p = \frac{U}{I} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (30)$$

#### Literatura

- 1 Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření, I, SPN, Praha 1983  
čl. 4.1.2.4, 4.4.4.1, 4.4.6.1, 4.4.7.1, stať 4.4.2
- 2 Sedlák B., Bakule R.: Elektřina a magnetismus  
SPN, Praha 1973, II.vyd. 1980, III.vyd. 1986

#### 7. MĚŘENÍ INDUKČNOSTI A KAPACITY METODOU PŘÍMOU

##### Pracovní úkol

1. Změřte závislost indukčnosti cívky na procházejícím proudu pro tyto případy:
  - a) cívka bez jádra
  - b) cívka s otevřeným jádrem
  - c) cívka s uzavřeným jádrem
2. Přímoou metodou změřte i odpor cívky a určete její kvalitu
3. Změřte velikost kapacit kondenzátorů z kapacitní dekády
4. Odhadněte přesnost měření. Výsledky měření úkolu 1c) zakreslete do grafu